الهندسة الفضائية (طرائق ، أمثلة)

(1) كيف تثبت الارتباط الخطي لشعاعين؟

طريقة : التحقق أن مركبات الشعاعين متناسبة أو كتابة أحد الأشعة بدلالة الآخر $\vec{u}=k\vec{v}$

مثال : الشعاعان $\vec{u}(1,2,-1)$ و $\vec{v}(-1,-2,1)$ مرتبطين خطيا لأن $\vec{u}=-\vec{v}$ أو بكتابة أخرى $\frac{-1}{1}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{-1}$.

تطبيقات : اثبات استقامية ثلاث نقط أو توازي مستقيمين.

(2) كيف تثبت أن ثلاث أشعة من نفس المستوى ؟

طريقة (1) : كتابة أحد الأشعة بدلالة الشعاعين الآخرين.

طريقة (2) : نبين وجود $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ بحيث $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$

مثال : الأشعة $\vec{u}(1,2,3)$ و $\vec{v}(-2,5,4)$ و $\vec{w}(-4,19,18)$ هي من نفس المستوي لأن الجملة

$$\begin{cases} a-2b-4c=0 \\ 2a+5b+19c=0 \\ 3a+4b+18c=0 \end{cases}$$ الحل $(2,3,-1)$

ومنه : $2\vec{u}+3\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$

تطبيق : اثبات أن 4 نقط هي من نفس المستوى.

(3) كيف تثبت أن ثلاثة أشعة ليست من نفس المستوى؟

طريقة : نبين أن $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ تقبل حلا وحيدا $(0,0,0)$.

مثال : $\vec{u}(1,2,3)$ و $\vec{v}(-2,5,4)$ و $\vec{w}(1,1,3)$ ليست من نفس المستوي لأن الجملة

$$\begin{cases} a-2b+c=0 \\ 2a+5b+c=0 \\ 3a+4b+3c=0 \end{cases}$$ لا تقبل أي حل سوى $(0,0,0)$.

ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ تشكل أساسا للفضاء.

(4) كيف تعين شعاع $\vec{n}$ عمودي على $\vec{u}$ و $\vec{v}$؟

طريقة : إذا كان نبحث عن حل $\vec{n}(a,b,c)$ للجملة : $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0 \\ \vec{n}.\vec{v}=0\end{cases}$.

مثال : $\vec{u}(1,2,3)$ و $\vec{v}(-2,1,7)$ اذن الجملة تكون : $\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -2a+b+7c=0 \end{cases}$

نأخذ مثلا $c=1$ ونحل الجملة .

ومنه $\vec{n}(\frac{11}{5},\frac{-13}{5},1)$ يكافئ $\vec{n}(11,-13,5)$

(5) كيف تعين التمثيل الوسيطي لمستقيم معرف بنقطة وشعاع؟

طريقة : (D) مستقيم يشمل نقطة A و شعاع $\vec{u}$ توجيه له . المستقيم الذي يشمل $A(x_A,y_A,z_A)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a,b,c)$ له التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases}$$

مثال : (D)مستقيم يشمل $A(1,2,-4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(6,1,-1)$ إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x=1+6t \\ y=2+t \\ z=-4-t \end{cases}$$

(6) تعيين المعادلة الديكارتية لمستوي يمر من نقطة A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له:

طريقة : باستعمال الجداء السلمي $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

مثال : $A(1,2,-4)$ ، $\vec{n}(1,-3,2)$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه

$$(x-1)-3(y-2)+2(z+4)=0$$

أي معادلة المستوي

$$x-3y+2z+13=0$$

تطبيق : تعيين المستوي الذي يمس سطح كرة في نقطة.

(7) تعيين معادلة ديكارتية لمستو معين بثلاث نقط A و B و C :

طريقة : نعين مركبات شعاع ناظمي $\vec{n}(a,b,c)$ بحيث $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ثم نحل جملة المعادلتين بفرض (مثلا $c=1$).

مثال : بين أن النقط $A(1,0,3)$ ، $B(1,3,2)$ ، $C(0,2,4)$ تمثل مستويا.

أولا : نبين أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا.

ثانيا : نكتب جملة المعادلتين $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

أي $\begin{cases} 3b-c=0 \\ -a+2b+c=0 \end{cases}$ إذن $\vec{n}(5,1,3)$

ومعادلة (ABC) هي من الشكل $5x+y+3z+d=0$ وبتعويض احداثيات احدى النقط نجد $(ABC): 5x+y+3z-14=0$

(8) تعيين معادلة مستوي يمر بنقطة وعلم أساس له

طريقة : نعين شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي ثم نطبق الطريقة السابقة.

مثال : (P) مستوي يشمل النقطة $A(1,-2,3)$ و $(\vec{u},\vec{v})$ أساس له حيث : $\vec{u}(-1,1,4)$ و $\vec{v}(0,-3,1)$.

ومنه $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي لـ (P) ومنه $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0 \\ \vec{n}.\vec{v}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}-a+b+4c=0 \\ 0a-3b+c=0\end{cases}$ وبحل الجملة نجد $\vec{n}(13,1,3)$ ومنه معادلة (P) هي $13x+y+3z-20=0$ بعد حساب قيمة d

(9) تعيين معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$:

طريقة : تعيين I منتصف القطعة $[AB]$ ثم تعيين المستوي الذي يشمل I و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له .

مثال : لتكن $A(2,-1,2)$ و $B(0,3,6)$ لدينا $I(1,1,4)$ و $\overrightarrow{AB}(-2,4,4)$

نعلم أن $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$ حيث

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-4\end{pmatrix}$ و $M(x,y,z)\in(P)$

ومنه معادلة (P) هي

$$x-2y-2z+9=0$$

(10) تعيين المسقط العمودي لنقطة على مستقيم و المسافة بين نقطة ومستقيم.

طريقة : لتعيين المسقط العمودي H للنقطة A على المستقيم (D) نكتب احداثيات H بدلالة t بواسطة التمثيل الوسيطي ثم إيجاد t باستعمال $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ حيث $\vec{u}$ شعاع توجيه (D).

مثال : (D) مستقيم حيث $(D):\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+t \\ z=-1-t \end{cases}$

و $A(-2,1,5)$ نقطة من الفضاء مسقطها العمودي على (D) هو النقطة H.

إحداثيات H تحقق $\begin{cases} x_H=1-3t \\ y_H=2+t \\ z_H=-1-t \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{AH}=\begin{pmatrix}3-3t\\1+t\\-6-t\end{pmatrix}$ ، وشعاع توجيه المستقيم (D) هو $\vec{u}(-3,1,-1)$ ونعلم أن $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ أي:

$$-3(3-3t)+(1+t)-(-6-t)=0$$

ومنه $t=\frac{2}{11}$ وبالتعويض في التمثيل الوسيطي :

$$H\left(\frac{5}{11},\frac{24}{11},\frac{-13}{11}\right)$$

ولحساب المسافة بين A و (D) نحسب المسافة AH

أي : $AH=\sqrt{\frac{502}{11}}$.

(11) تعيين المسقط العمودي لنقطة على مستوي و المسافة بين نقطة ومستوي :

طريقة : لتعيين المسقط العمودي لنقطة A على مستوى (P) نعين أولا الشعاع الناظمي $\vec{n}$ لهذا المستوي ، ثم نعين نقطة تقاطع المستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع توجيه له مع المستوي (P).

مثال : تعيين المسقط العمودي H للنقطة $A(1,2,-3)$ على المستوي (P) ذي المعادلة:

$$2x-y+5z-8=0$$

الشعاع الناظمي لـ (P) هو $\vec{n}(2,-1,5)$ ، التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع توجيه له :

$$(D):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+5t \end{cases}$$

وبما أن $H\in(D)$ و $H\in(P)$ إذن :

$$\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=2-t \\ z_H=-3+5t \\ 2x_H-y_H+5z_H-8=0 \end{cases}$$

ومنه $t=\frac{23}{30}$ وبالتالي : $H(\frac{38}{15},\frac{37}{30},\frac{5}{6})$

والمسافة بين النقطة A و المستوي (P) هي :

$$d(A,(P))=\frac{\left|2\left(\frac{38}{15}\right)-\frac{37}{30}+5\times\frac{5}{6}-8\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{529}{30}}$$

الهندسة الفضائية (طرائق ، أمثلة)

(12) تعيين المستقيم العمودي على مستقيمين ، والمسافة الأصغرية بين مستقيمين.

طريقة : (D) المستقيم ذي شعاع التوجيه $\vec{u}$ و يشمل A و (D') مستقيم يشمل B و $\vec{v}$ شعاع توجيه له.

نفكك الشعاع $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ وبما أن $\overrightarrow{AM} = \propto \vec{u}$ و $\overrightarrow{BN} = \beta\vec{v}$ نكتب مركبات الشعاع $\overrightarrow{MN}$ بدلالة $\propto$ و β .

$\overrightarrow{MN}$ يجب أن يكون عموديا على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$

معناه $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{v} = 0 \end{cases}$ نحدد قيمة $\propto$ و β ثم نجد احداثيات M و N .

مثال : (D) مستقيم معرف بــ $\begin{cases} A(1,1,0) \\ \vec{u}(2,0,1) \end{cases}$ و (D') مستقيم معرف بــ $\begin{cases} B(0,1,-3) \\ \vec{v}(-1,3,1) \end{cases}$.

لتكن M نقطة من (D) و N نقطة من (D') .

نفكك الشعاع $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ وعلما أنه يوجد $\propto$ و β بحيث $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \propto \vec{u} \\ \overrightarrow{BN} = \beta\vec{v} \end{cases}$ يكون

لدينا $\overrightarrow{MN} = -\propto \vec{u} + \overrightarrow{AB} + \beta\vec{v}$ ومنه مركبات $\overrightarrow{MN}$ هي

$$(-2 \propto -1 - \beta, 3\beta, -\alpha - 3 + \beta)$$

نحل الجملة $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{v} = 0 \end{cases}$ فنجد

$$\begin{cases} -4 \propto -2 - 2\beta - \alpha - 3 + \beta = 0 \\ 2\alpha + 1 + \beta + 9\beta - \alpha - 3 + \beta = 0 \end{cases}$$

إذن $\propto = \frac{-19}{18}$ و $\beta = \frac{5}{18}$

ومنه $M\left(\frac{-10}{9}, 1, \frac{-19}{18}\right)$ و $N\left(\frac{-5}{18}, \frac{11}{6}, \frac{-49}{18}\right)$

وبالتالي المسافة الأصغرية بين المستقيمين هي :

$$MN = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

(13) كيف تعين تقاطع مستويين ؟

طريقة : نعين تمثيلا وسيطيا بحل جملة المعادلتين للمستويين (P) و (P') و بفرض أحد المجاهيل كوسيط .

مثال : $(P): 2x - y + 3z - 4 = 0$ و $(P'): 3x - 2y + 11z - 1 = 0$ إذن :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x - 2y + 11z - 1 = 0 \end{cases}$$

تكافئ : $\begin{cases} x = 5z + 7 \\ y = 13z + 10 \end{cases}$ بوضع $z = t$ نجد

$\begin{cases} x = 5t + 7 \\ y = 13t + 10 \\ z = t \end{cases}$ وهو التمثيل الوسيطي لمستقيم التقاطع.

(14) كيف تعين تقاطع مستوي و مستقيم ؟

طريقة : معادلة المستوي (P) و التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) يشكلان جملة 4 معادلات بأربعة مجاهيل ، نعوض x ، y ، z في معادلة (P) فنحصل على t . ومنه نجد نقطة التقاطع.

مثال : $(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ و

$(P): 3x - 2y + 11z - 1 = 0$

نحل الجملة $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \\ 3x - 2y + 11z - 1 = 0 \end{cases}$

فنجد $t = \frac{-1}{8}$ ومنه التقاطع هو $A(\frac{7}{8}, \frac{-5}{4}, \frac{-3}{8})$

(15) كيف تعين تقاطع مستقيمين ؟

طريقة : نعرّف المستقيمين بتمثيليهما الوسيطيين. نساوي التمثيلين و نحل جملة 3 معادلات لإيجاد إحدى الوسيطين ثم نعوض في التمثل الوسيطي لإيجاد نقطة التقاطع.

مثال : $(D): \begin{cases} 1 + t \\ -1 + 2t \\ 3t \end{cases}$ و $(D'): \begin{cases} x = -4 + 3t' \\ y = 3 - 8t' \\ z = -13 + 7t' \end{cases}$

بحل الجملة $\begin{cases} 1 + t = -4 + 3t' \\ -1 + 2t = 3 - 8t' \\ 3t = -13 + 7t' \end{cases}$

نجد $t = -2$ و $t' = 1$

إذن نقطة التقاطع هي $A(-1, -5, -6)$

(16) كيف تعين تقاطع كرة مع مستقيم؟

طريقة : لتعيين تقاطع كرة مع مستقيم معرّف بتمثيله الوسيطي نعوض x، y، z في معادلة الكرة ، لتصبح معادلة من الدرجة الثانية بمجهول t.

اذا كان لدينا حلان (المستقيم يقطع الكرة في نقطتين) إذا كان لدينا حل مضاعف (فالمستقيم مماس للكرة في نقطة التماس) أما اذا لم يوجد حل (فلا يوجد تقاطع).

مثال : (S) كرة معادلتها :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0$$

و (d) مستقيم : $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$

بالتعويض في المعادلة الديكارتية :

$$6t^2 + 2t = 0$$

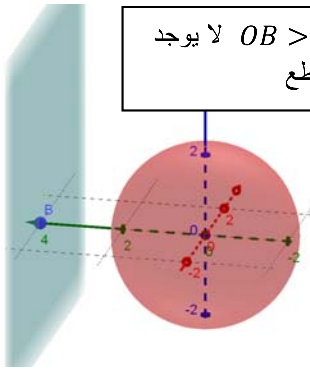
ومنه $t_1 = 0$ و $t_2 = -\frac{1}{3}$ ومنه :

$$\begin{cases} t_1 = 0 \;\rightarrow A(1,1,-3) \\ t_2 = -\dfrac{1}{3} \;\rightarrow B(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{10}{3}) \end{cases}$$

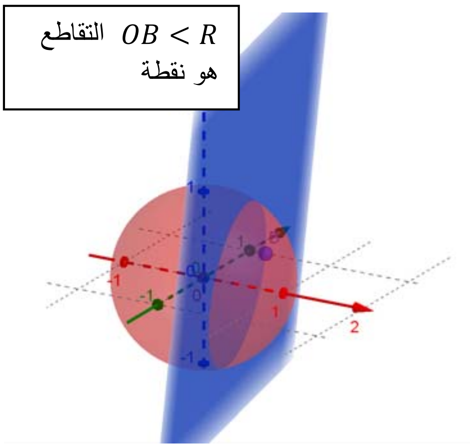
(17) كيف تُعين تقاطع كرة مع مستوي ؟

طريقة : لدراسة تقاطع كرة و مستوي ، نعين المسقط العمودي H لمركز الكرة O على المستوي ثم نحسب المسافة OH، إن تقاطع مستوي مع كرة إما خال (اذا كانت المسافة أكبر من نصف قطر الكرة) وإما نقطة (إذا كان المستوي مماس للكرة) وإما دائرة (إذا كانت المسافة أقل من نصف قطر الكرة).

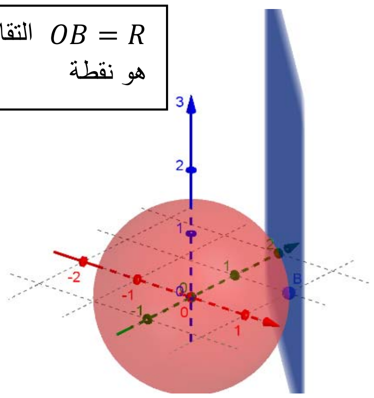
$OB > R$ لا يوجد تقاطع



$OB < R$ التقاطع هو نقطة



$OB = R$ التقاطع هو نقطة



مثال : نعتبر الكرة (S) مركزها $w(2,-1,1)$ ونصف قطرها $R = 3$ ونعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x - 2y + z + 1 = 0$

إن المسافة بين النقطة w و المستوي (P) هي :

$$d(w,(P)) = wH$$

$$= \frac{|2 + 2 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}$$

وبما أن $\sqrt{6} < R = 3$ فان (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة (c) مركزها النقطة Hونصف قطرها r ، وبتطبيق نظرية فيثاغورس في المثلث القائم في H wHM نجد : $R^2 = r^2 + d^2$ ومنه :

$$r = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$$

و H هو نقطة تقاطع المستقيم (T) المار بــ w والعمودي على (P) ، ولدينا $\vec{n}(1,-2,1)$ هو شعاع ناظمي لــ (P) ومنه شعاع توجيه لــ(T) ومنه التمثيل الوسيطي

$$(T): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t: \\ z = 1 + t \end{cases}$$

وبالتعويض في معادلة المستوي (P) نجد

$$t = -1$$

ومنه $(x, y, z) = (1,1,0)$.

إذن تقاطع (P) و (S) هي الدائرة (c) التي مركزها $H(1,1,0)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$.