سلسلة استعد للبكالوريا رقم (01)

المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبـــــة : **علوم تجريبية + رياضيات و تقني رياضي**

المحور : الدوال العددية لمتغير حقيقي

Les fonctions numériques d'une variable réelle

- * -الوحدة الأولى: النهـــــــايات- **-limites** * -

1- إثبات نهاية باستعمال التعريف

التمرين (01) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$

1) أوجد عدداً حقيقيا A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]2{,}9;3{,}1[$.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=3$ مقارب للمنحنى C_f الممثل لدالة f .

التمرين (02) : اثبت باستعمال التعريف النهايات التالية :

/1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

/2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)=+\infty$ ، /3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$

/ 4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{x+4}=3$ ، /5 $\lim\limits_{x\to 1}(2x+5)=7$

2- التمكن من حساب النـــــهايات و إزالة حالة عدم تعيين و التفسير البياني

التمرين (03) في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها وعيّن معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f.

/1 $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x^2-4x+3}$ ، /2 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$ ، /3 $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$

/4 $f(x)=\dfrac{-4x+8}{x^2-4x+5}$ ، /5 $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

التمرين (04) في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها وعيّن معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f.

/1 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$ ، /2 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

/3 $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ ، /4 $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$

/5 $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ ، /6 $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2\left(x^2-1\right)}$

التمرين (05) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)$ ، 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ ، 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

التمرين (06) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x+2}{x^3-3x^2-x+3}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-2}{4x+3}}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، 8) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ، 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

التمرين (07) باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

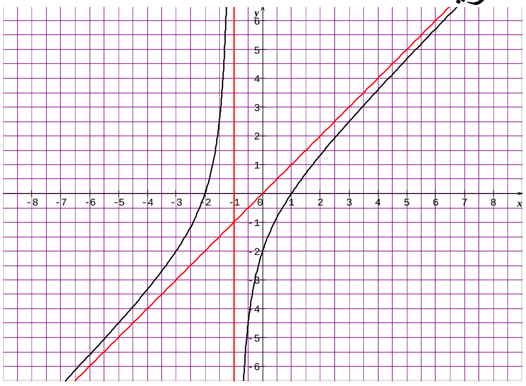
1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2007}-1}{x-1}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

التمرين (08) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x+1}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين بيانيا ثم حسابيا نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف



2) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ،

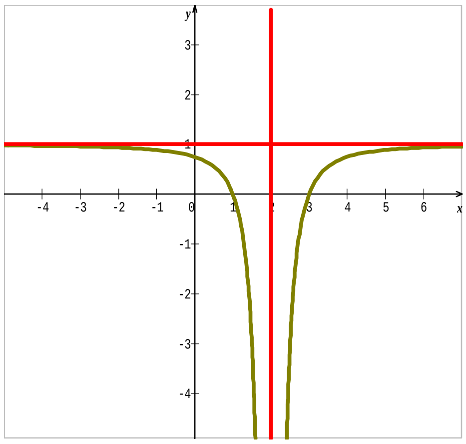
$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحنى C_f

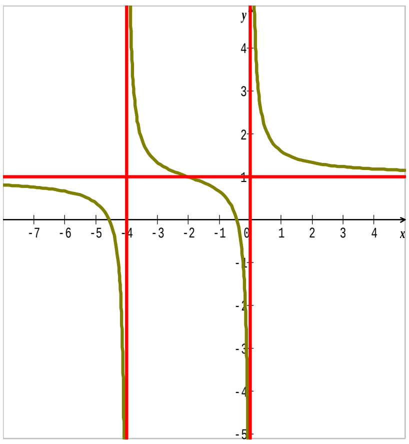
4) حدد الوضع النسبي للمنحنى C_f و المستقيم المقارب المائل من البيان ثم تحقق حسابيا.

التمرين (09) في كل حالة من الحالات التالية عيّن D_f مجموعة التعريف والنهايات في حدود المجموعة D_f وشكل جدول التغيرات لكل دالة .

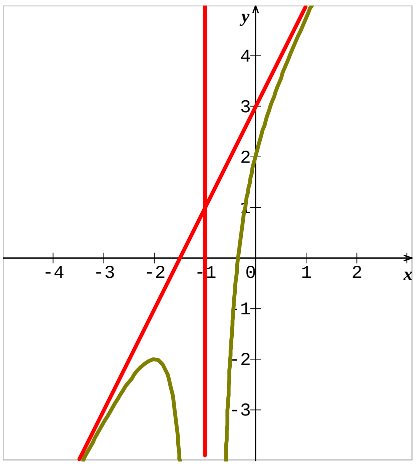
الحالة(1)



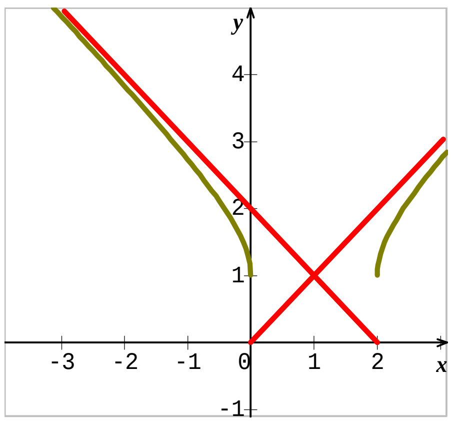
الحالة(2)



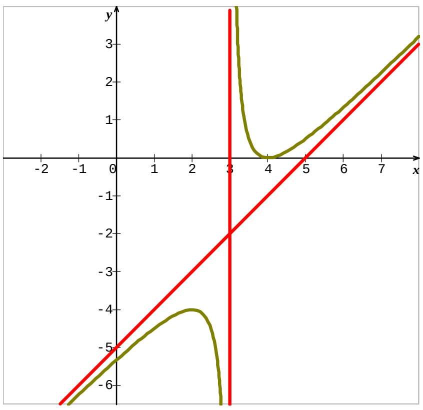
الحالة(3)



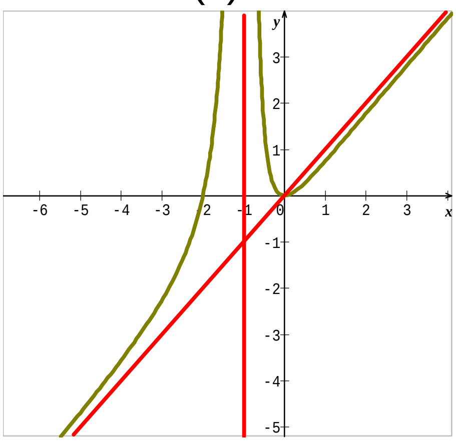
الحالة(4)



الحالة(5)



الحالة(6)



3- النهايات و المقارنة (الترتيب)

التمرين (10) لتكن f دالة معرفة على $D=[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$x^2\leq x^2+x+1\leq(x+1)^2 \quad \text{و} \quad x\leq\sqrt{x^2+x+1}\leq x+1$$

2) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $1-\dfrac{1}{x+1}\leq f(x)\leq 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

التمرين (11) باستعمال مبرهنات المقارنة احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin x}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x^2+1}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ،

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+E(x)\right)$ ، 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+E(x)\right)$، حيث E هي دالة الجزء الصحيح

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 3x-\cos 2x}{x}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$ ، 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

التمرين (12) (u_n) متتالية معرفة بـــ : $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dfrac{n}{n^2+3}+\dots\dots\dots+\dfrac{n}{n^2+n}$

- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4- حساب نهايات باستعمال النهاية: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ أو تعريف العدد المشتق أو تبديل المتغير

التمرين (13) احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{x}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{p}{2}}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{bx}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ،

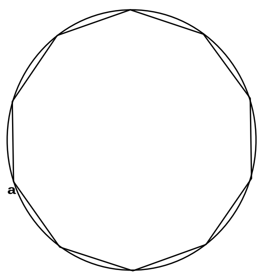
التمرين (14) احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$ ، 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x - \sqrt{3}\sin x}{x - \frac{\pi}{6}}$ ، 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{2x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ ، 5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$ ، 6) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$

التمرين (15) **هل تساءلت يوما لماذا مساحة قرص نصف قطره r هي** : πr^2 ؟

إليك برهان من بين البراهين : خذ قرص نصف قطره r مركزه O و ارسم داخله مضلع منتظم مركزه O ذي n رأس بحيث رؤوسه تنتمي الى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r



1- بيّن أن مساحة المضلع تساوي : $\dfrac{1}{2} r^2 . n \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

2- استنتج عندئذ مساحة القرص

- * - الوحدة الثانية : الاستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة - * -

continuité –théorème des valeurs intermédiaires

1- الاستمرارية

التمرين (16) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ x < 1 \\ \dfrac{1}{x} - 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 1

2- احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

التمرين (17) نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \ ; & x \in [-2;1[\\ f(x) = x - 1 \ ; & x \in [1;4[\end{cases}$$

1) مثل بيانيا الدالة f في معلم.هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2;4[$ ؟لماذا؟

التمرين (18) f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـــ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2} & ; x\le 0 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0

2- استنتج أن الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$.

التمرين (19) حدد العددين a و b حتى تكون الدالة f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & ; x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{3} & ; x\le 2 \end{cases}$$

مستمـــــــــرة عند القيمة $x_0=2$

التمرين (20) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+\dfrac{|x|}{x} & x\ne 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0

2- انطلاقا من منحني ممثل لدالة مرجعية استنتج التمثيل البياني للدالة f

التمرين (21) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & ,x\ne 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$$

1- بيّن أن f دالة زوجية

2- اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

3- ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها

4- احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا

5- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

6- ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

التمرين (22) نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ بـِـ: $f(x)=xE(x)+1$

حيث الدالة $x \mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.
2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة f.
3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$؟ على المجال $[-1;2[$؟

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$

التمرين (23) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-8}{2x-8} & , x \in]-\infty;0[\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4} & , x \in [0\ ;\ 4] \\ x-5+\dfrac{4}{x} & , x \in]4;+\infty[\end{cases}$$

- بيّن أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

التمرين (24) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ:

$$f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)$$

حيث E هي دالة الجزء الصحيح

1/ عيّن D_f مجموعة تعريف f و اكتب $f(x)$ بدون رمز $E(x)$

2/ ادرس استمرارية f عند القيم $x=\pm\sqrt{2}$ و $x=\pm 1$

3/ ادرس تغيرات الدالة f .

4/ ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

التمرين (25) نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي: $f(x)=x(x+E(x))$

حيث $x \mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-2;-1[$ ، $[-1;0[$ ، $[0;1[$

2) ارسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحني الممثل للدالة f .

3) هل الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$ ؟

2– مبرهنة القيم المتوسطة و الدوال الرتيبة تماما وتطبيقات مبرهنة القيم المتوسطة في التعرف على حلول المعادلة : $f(x)=k$

التمرين (26) بيّن أن المعادلات التالية تقبل حلا ، على الأقل ، في المجال I.

1) $X^4+X^2+4X-1=0$ $\quad I=[0;1]$

2) $\cos x=x$ $\quad I=[0;\pi]$

3) $2\sin x-x=0$ $\quad I=\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

التمرين (27) f دالة معرفة على $I=[1;3]$ بالعبارة $f(x)=-x+2+\frac{3}{x^2}$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f على I ثم عيّن $f(I)$

2) ماهو عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{1}{4}$ على I ؟

التمرين (28) f دالة معرفة على $I=[-1;1]$ بالعبارة $f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

1– احسب: $f(-1)$,$f\left(\frac{-1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(1)$

2- استنتج عدد حلول المعادلة : $f(x)=0$ في المجال $I=[-1;1]$

التمرين (29) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}-\{1\}$

بــ: $f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=x+a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

2) ادرس تغيرات الدالة f و بيّن أن المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلته

3) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

4) بيّن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$

5) باستعمال طريقة التنصيف أوجد حصرا لــ a سعته 0.05 ثم ارسم المنحنى C_f

التمرين (30) 1/ f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث : $f(a) > a$ و $f(b) < b$. بيّن أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا ، على الأقل ، في المجال $[a;b]$

2/ f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث : $f(a) < ab$ و $f(b) > b^2$. بيّن أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$ بحيث يكون : $f(c) = bc$

التمرين (31) عيّن جدول إشارات الدالة f علما أنها تنعدم عند القيمتين -5 و 6 وجدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	-2	↗	-1	↘	-3	↗	$+\infty$

التمرين (32) f دالة معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني و جدول تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

أجب بـــ :**خطأ** أو **صحيح** على كل سؤال مما يلي مع تبرير الإجابة .

1. المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحني (C_f)
2. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا .
3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $S =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$
4. في المجال $]-\infty;-1[$ يكون :"$f(-2) > f(x)$ عندما يكون $x < -2$ " .
5. النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى المنحني (C_f).

6- الدالة f زوجية .

التمرين (33) 1- ادرس تغيرات الدالة $f: x \to x^3 - 3x + 1$ على المجال $[-1;1]$

2- بيّن أن المعادلة : $(E): x^3 - 3x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيد α في المجال $]0;1[$

3- باستعمال آلة حاسبة عيّن قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α

التمرين (34) نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على التوالي على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}$

بـِ: $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2-x+2$.

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0، المعادلة $f(x)=g(x)$

تكافئ المعادلة $x^3-x^2+2x-1=0$.

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $h(x)=x^3-x^2+2x-1$

- أدرس اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$. أحسب $h(0)$ و $h(1)$.
- برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا c على $\mathbb{R}$. ماذا يمثل بيانيا العدد c
- باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للحل c سعته 10^{-2}.

التمرين (35) نعتبر الدالتين $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g: x \mapsto -x^3$

- بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-\frac{7}{8}<x_0<-\frac{3}{4}$.

التمرين (36) n عدد طبيعي غير معدوم.

1) بين أن المعادلة $x^{n+1}-2x^n+1=0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 .

2) هل المعادلة $x^8-2x^7+1=0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل.

التمرين (37) **الجزء الأول**: نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $g(x)=2x^3+x^2-1$

1. أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a يطلب تعيين حصر له سعته $0{,}1$.
3. حدد، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـِ: $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{3x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $3cm$.

1. أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن $f(a)=\frac{a}{6}+\frac{1}{2a}$ ثم استنتج ، باستعمال حصر العدد a، حصرا للعدد $f(a)$.
5. أرسم المنحني (C_f) (نأخذ $a\approx\frac{2}{3}$).

{ التدريب على حل تمارين بكالوريات }

التمرين (01) f الدالة العددية المعرفـــــة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{x-3}$

نسمــــــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

2/ استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ.

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ أوجد إحداثيي النقطة w تقاطع المستقيمين المقاربين واثبت أنها مركز تناظر للمنحني C_f

5/ ارسم المنحني C_f .

6/ برهن على وجود مماسين للمنحني C_f معامل توجيه كل منهما -3 يطلب تعيين نقطتي التماس A و B و التحقق من أن النقطتين A و B متناظرتان بالنسبة للنقطة w

7/ استنتج رسم المنحني C' الممثل للدالة h المعرفة بــــ: $h(x)=\dfrac{(x-4)^2}{|x-3|}$

التمرين (02) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بــ:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$$

نسمــــــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و g بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{g}{(x+1)^2}$$

3/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له

4/ ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

5/ احسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

6/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مماسا Δ معامل توجيهه 1. اكتب معادلة لـــ Δ

7/ أنشئ المماس Δ و المنحني C_f

8/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

التمرين (03) I) $P(x)$ كثير حدود حيث : $P(x)=-x^{3}+6x^{2}-13x+8$

1/ احسب $P(1)$ واستنتج تحليلا لكثير الحدود $P(x)$

2/ ادرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x

II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـــــ: $f(x)=-x+1+\dfrac{x-1}{(x-2)^{2}}$

1- عيّن D_f أكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f

2- بيّن أنه مهما يكن العدد الحقيقي x من D_f فإن : $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x-2)^{3}}$

3- ادرس تغيرات الدالة f

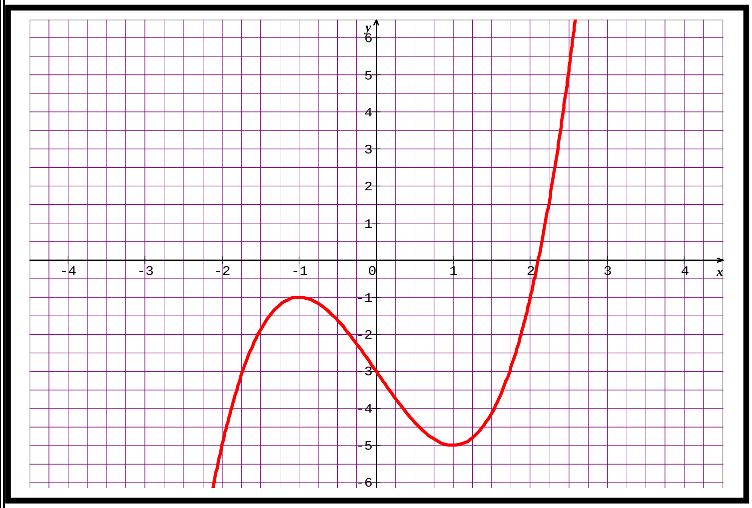
4- بيّن أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

5- ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

6- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 3.

7- ارسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحني C_f

التمرين (04)



I - المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يأتي : $g(x)=ax^{3}+bx+c$

1- أوجد الأعداد : $a\ ,\ b\ ,\ c$

2- أكتب جدول تغيرات الدالة g

3- بيّن ان المعادلة $x^{3}-3x-3=0$ تقبل حلا وحيدا a من المجال $\left]2\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$

4- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II- f دالة معرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{2x^{3}+3}{x^{2}-1}+1$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x)=\dfrac{2x.g(x)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب النهايات عند حدود D

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

هــ) بيّن أن: $f(a)=3a+1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(a)$

و) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (Γ)

ي) ادرس وضعية المنحني (Γ) بالنسبة للمستقيم (Δ) ثم ارسم (Γ)

التمرين (05) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ:

$$f(x)=2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}$$

نسمـــــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني C_f.

2) عيّن وضعية المنحني بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a على المجال $\left]\frac{-3}{8};\frac{-1}{4}\right[$.

4) استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x

5) اكتب معادلة للمماس Δ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6)ارسم المماس Δ و المنحني C_f

التمرين (06) f الدالة العددية المعرفـــــة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2}$

نسمـــــــــي (C) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف و فسّر النتائج بيانيا .

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل

4- بيّن أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

5- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) في النقطة التي فاصلتها -1 .

6- ارسم المماس (Δ) ثم المنحني (C) .

7- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :

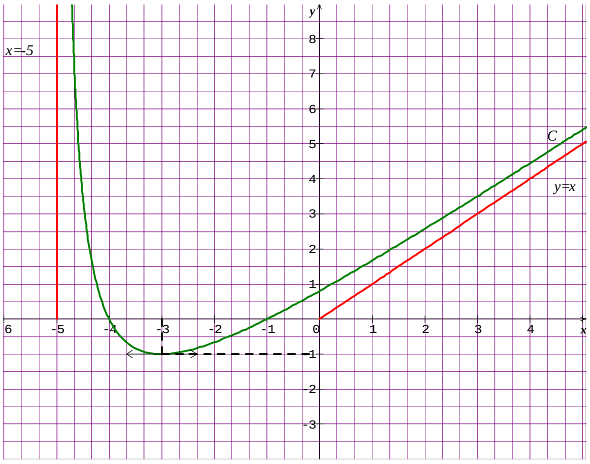
$$(m-1)x^2-2x+1=0$$

8- g الدالة المعرفة بـــــ : $g(x)=\frac{x^2+2|x|-1}{x|x|}$

أ) ادرس شفعية الدالة g

ب) بيّن أن المنحني (Γ) الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحني (C) -ارسم (Γ)

التمرين (07)



I . f دالة معرفة على $I=]-5;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x+5}$$ ، (C_f) تمثيلها البياني

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

كما هو مبين في الشكل .

1) أ- احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب- بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f

شكل جدول تغيراتها .

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;-5[$ بالعبارة : $g(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{-x-5}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

أ- احسب نهاية g عند حدود مجموعة تعريفها .

ب- تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

جـ - ادرس تغيرات g

II k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-5\}$ كما يلي : $k(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{|x+5|}$

1) اكتب $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

2) من نتائج الجزء الأول شكل جدول تغيرات الدالة k

3)ارسم (C_k) المنحني الممثل للدالة k في معلم متعامد ومتجانس

التمرين (08)

نعتبر الدالة f المعرّفة بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$

يرمز C إلى المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيّرات الدالة f . استنتج معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني C .

2) أكتب معادلة لمماس المنحني C عند نقطته ذات الفاصلة 5 .

3) أثبت أن المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحني C . أرسم المنحني C .

4) نعتبر الدالة f_m المعرّفة بـ : $f_m(x)=\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ حيث m وسيط حقيقي .

أ- بيّن أنه يمكن كتابة $f_m(x)$ على الشكل : $f_m(x)=1-\dfrac{12}{x^2-mx-3}$

ب ـ أدرس تغيرات الدالة f_m و استنتج المستقيميات المقاربة للمنحني C_m .

جـ ـ بين أنّه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات C_m .

د ـ ما هو المنحني الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(4;1)$ ؟

التمرين (09) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}$ كما يأتي :

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+3x-1}{x^2+1}$$

(C_f) منحني الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c.x}{x^2+1}$$

2/ أ- ادرس تغيرات الدّالة f

ب- احسب : $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$. ماذا تستنتج ؟

3/ بيّن أن المنحني (C_f) يقبل ثلاث نقط انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .وبيّن أنها في استقامية .

4/ أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم المقارب ، يطلب إعطاء نقطتي التماس و معادلتي المماسين.

5/ أثبت أنه لكل عدد حقيقي x : $f(-x)+f(x)=-2$. أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

6/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة w التي ترتيبها -1.

7/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) و ماذا تستنتج ؟

8/ أثبت أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $x_0\in\left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$

9/ ارسم بدقة المستقيم المقارب و المماسات الثلاثة و المنحني (C_f) .

10/ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :

$$(m+1)x^2-2x+(m+1)=0$$

التمرين (10) f الدالة العددية المعرفــــة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$

نسمــــــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و g بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=x+a+\frac{b}{x+1}+\frac{g}{(x+1)^2}$$

2/ استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ.

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ثم ارسم المنحني C_f

5/ استعمل C_f ، عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$3x^2+(x-m)x^2+(10-2m)x+5-m=0$$

6/ g الدالة المعرفة بـــــ : $$g(x)=\frac{|x|^3+3x^2+10|x|+5}{(|x|+1)^2}$$

ب)بيّن أن الدالة g زوجية

ب) بيّن أن المنحني (Γ) الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحني C_f -ارسم (Γ)

التمرين (11) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ:

$$g(x)=3x+\frac{1}{(x+1)^3}$$

نسمـــــــــــي (Γ) المنحني الممثل للدالة g في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) 1/ ادرس تغيرات الدالة g واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (Γ)

2/ ادرس وضعية المنحني (Γ) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

3/ أثبت أن النقطة w تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني (Γ)

3/ ارسم المنحني (Γ) واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــــةعلى $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2(x+1)^2}$$

نسمـــــــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم بيّن أنه لكل x من D_f : $f'(x)=g(x)$

2/استنتج جدول تغيرات الدالة f

3/ أثبت أن المنحني C_f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها aحيث: $a\in\,]0;1[$

4/ باستعمال خوارزمية التنصيف عيّن حصرا لـــــ a سعته 0.25

5/ (P) المنحني الممثل للدالة p حيث : $p(x)=\frac{3}{2}x^2$

أ) -بيّن أن (P) و C_f متقاربان .

ب) حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة للمنحني (P)

جـــ)-ارسم المنحني (P)

د) - احسب $f\left(\frac{-3}{2}\right)$ و ارسم المنحني C_f .

التمرين (12) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

(C_f) منحني الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدّالة f

2) أ- بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته : $y=x$

ب-ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و (D) .

3) أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدةفاصلتها x_0 حيث : $1.3<x_0<1.4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحني (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

ج- أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم .

4) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=|f(x)|$

(C_g) منحني الدالة g في المعلم السابق .

- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم أرسمه في نفس المعلم السابق .

6-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المـــــــــــعادلة ذات المجـــــــهول x : $g(x)=m^2$

التمرين(13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$$

نسمـــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x)=x^3-3x-4$

أ) ادرس تغيرات الدالة g .

ب) اثبت أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $g(\alpha)=0$ ، ثم عين قيمة مقربة إلى 10^{-2}

جـــ) ادرس إشارة g على $\mathbb{R}$

2-أحسب نهايات الدالة عند حدود كل مجالات مجموعة تعريفها.

2–بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$

3–استنتج جدول تغيرات الدالة f .

4–برهن أنه من أجل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f(x)=x+2+\frac{x+2}{x^2-1}$

- استنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

- ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم (D) .

6- ارسم (D) و C_f

التمرين (14) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـ: $f(x)=\frac{4(x-1)}{(x-2)^2}$

نسمـــــي C_f المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) 1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى C_f عند نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل.

3/ بيّن أن المماس (Δ) يقطع المنحنى C_f في نقطة B يطلب تعيين احداثييها

4/ احسب: $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ ثم ارسم بدقة المماس (Δ) ثم المنحنى C_f.

ب) m وسيط حقيقي ، (Δ_m) مستقيم معادلته : $y=4x+m$

- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد النقط المشتركة بين المنحنى C_f و (Δ_m)

التمرين(15) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها .

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بين أن المستقيمين $\Delta: y=x+1$ و $\Delta': y=-x-1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال $]1;+\infty[$ و ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على المجال $]-\infty;-1[$.

4) بين أن المعـــــــــادلة $f(x)=0$ تقبل حـــــلاً واحداً a على المجال $]-1;1[$ ، وأعط حصراً لـــــ a سعته 10^{-1}

5) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C)

الهدية

النجاح مطلب الجميع وتحقيق النجاح الدراسي يعتبر من أولويات الأهداف لدى الطالب ..ولكل نجاح مفتاح وفلسفة وخطوات ينبغي الاهتمام بها... ولذلك أصبح النجاح علما و هندسة

1 - الطموح كنز لا يفنى :

لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا ولذلك كان الطموح هو الكنز الذي لا يفنى ..فكن طموحا وانظر إلى المعالي..

2- - العطاء يساوي الأخذ :

النجاح عمل وجدّ وتضحية وصبر ومن منح طموحه صبرا وعملا وجدا حصد نجاحا وثمارا..فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقق النجاح والطموح والهدف ..فمن جدّ وجد ومن زرع حصد.. وقل من جد في أمر يحاوله و أستعمل الصبر إلا فاز بالظفر