سلسلة استعد للبكالوريا رقم (07)

المستوى : ثالثة ثانوي
الشعبـــــة : علوم تجريبية + رياضيات
و تقني رياضي

{ المحور : الاستدلال بالتراجع و المتتاليات العددية }

الاستدلال بالتراجع

التمرين (01) برهن بالتراجع أن :

1) لكل عدد طبيعي n غير معدوم ، العدد $3\times5^{2n-1}+2^{3n-2}$ يقبل القسمة على 17.

2) لكل عدد طبيعي n ، العدد $3n^3+6n$ مضاعف للعدد 9

- استنتج أن مجموع مكعبات ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة يقبل القسمة على 9.

3) لكل عدد طبيعي n ، العدد $2^{6n+5}+4\times5^{2n+1}$ يقبل القسمة على 13.

4) لكل عدد طبيعي n ، العدد $10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ يقيل القسمة على 111

التمرين (02) : برهن بالتراجع أن :

1) لكل عدد طبيعي n ، $0^2+1^2+2^2+......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) لكل عدد طبيعي n غير معدوم

$$(1\times2^0)+(2\times2^1)+(3\times2^2)+..........+(n\times2^{n-1})=1+(n-1).2^n$$

3) لكل عدد طبيعي n ، $1-3+5-7+..........+(-1)^n.(2n+1)=(-1)^n.(n+1)$

4) لكل عدد طبيعي n ، $1+2^3+3^3+..........+n^3=\dfrac{1}{4}.n^2.(n+1)^2$

5) لكل عدد طبيعي n غير معدوم : $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+........+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

التمرين (03) f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $f_1=f$ و $f_{n+1}=f_n \circ f$

1/ احسب كلا من : $f_2(x)$ و $f_3(x)$ و $f_4(x)$

2/ أعط تخمينا لعبارة $f_n(x)$

3/ برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقا ، ثم استنتج عبارة $f_n(x)$

التمرين (04) برهن بالتراجع أن :

1) من أجل كل عدد طبيعي اكبر من أو يساوي 6 : $3^n \geq 100n$

2) لكل عدد طبيعي n ، $(1+a)^n \geq 1+an$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما (متباينة برنولي)

- استنتج أنه إذا كان $q > 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$

التمرين (05) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$

1/ عيّن f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f

2/ أعط تخمينا ، حسب قيم العدد n لعبارة $f^{(n)}(x)$

3/ برهن بالتراجع صحة تخمينك

تعريف : عاملي العدد الطبيعي n هو العدد الطبيعي الذي نرمز له بـــ

التمرين (06) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x\cos x$.

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f^{(n)}(x)=x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

التمرين (07) n عدد طبيعي ، نسمي $P(n)$ الخاصية : 9 يقسم 10^n+1

أ) أثبت أن $P(n)$ خاصية وراثية

ب) هل من اجل كل عدد طبيعي n ، 10^n+1 مضاعف 9 ؟

ج) ماهي النتيجة المستخلصة من هذا التمرين ؟

Le raisonnement par récurrence est la version mathématique du raisonnement « de proche en proche ». Il s'énonce comme suit :

Principe de récurrence - Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n \ldots$ des propriétés mathématiques. On sait que P_0 est vraie. On sait aussi que, pour un *n* quelconque, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie aussi. Alors, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Une application simple de ce principe est la définition par récurrence : si on définit un objet x_0 puis si, pour tout entier *n*, on donne une manière de définir l'objet x_{n+1} à partir de l'objet x_n, alors les objets x_n sont bien définis pour tout *n*.

Une démonstration par récurrence **contient donc toujours deux étapes** :

- L'initialisation : c'est la vérification de P_0. **Il ne faut jamais l'oublier, sinon on raisonne sur du vide** !
- La récurrence proprement dite : on suppose que la propriété P_n est vraie (on l'appelle hypothèse de récurrence), et on essaie de montrer P_{n+1} à partir d'elle

عموميات على المتتاليات العددية :اتجاه التغير، التقارب، المتتاليات المحدودة، التمثيل البياني

التمرين (01) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_1 = 1 \quad ، \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n{}^2 - 2u_n + 4)$$

1/ احسب u_2 و u_3 . 2/ بيّن أن المتتالية (u_n) متــــزايدة .

3/ بيّن أن : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 + \frac{3}{2}$ ثم برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2

4/ استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

التمرين (02) (u_n)المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ، أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

التمرين (03) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$ و $u_0 = 1$

1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني

(d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

جـــ - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$ وماذا تستنتج ؟

ب- تحقق أن (u_n) متناقصة .

جـــ - أستنتج أن (u_n) متقاربة ؟ و أحسب نهايتها

التمرين (04) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

1) احسب الحدود : u_2 ، u_3 و u_4. أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n

2) أثبت أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متزايدة تماما

3) أثبت بالتراجع أن : $u_n = \sqrt{n}$ ثم استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متباعدة .

التمرين (05) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=-5 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+6} \end{cases}$

1) أ – ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[-6;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\sqrt{x+6}$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ وتقاربها.

2) أثبت بالتراجع أنه لكل n من $\mathbb{N}$ يكون : $u_n<3$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ . . ماذا تستنتج ؟ اوجد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

التمرين (06) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بحدها الأول $u_1=1$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2+u_n$

1-مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

2- ضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك

التمرين (07) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0\in[0,1]$ و $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

1)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$

2)أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة – أســـــتنتج أنها تقبل نهاية يطلب حسابـــــها

3)نضع : $u_0=\cos(\theta)$ / $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

أ)برهن بالتراجع أن : $u_n=\cos(\frac{\theta}{2^n})$. ب) أحسب نهاية (u_n)

التمرين (08) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{u_n^3}{3u_n^2+1}$ لكل n من N

/1 أ- بيّن أن $u_n>0$ لكل n من N . ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة و ماذا تستنتج؟

/2 أ- بيّن أن $u_{n+1}<\frac{1}{3}u_n$ لكل n من N

ب- استنتج أن : $u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من N ثم احسب $\lim u_n$

التمرين (09) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{4}{3}$ و $u_{n+1}=\frac{n+1}{n+3}u_n$

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .ثم برهن بالتراجع أنه : $u_n=\frac{8}{(n+2)(n+3)}$

2) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{a}{n+2}+\frac{b}{n+3}$

3) استنتج المجموع : $s_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$ ثم احسب : $\lim_{n\to+\infty}s_n$

التمرين (10) ادرس تقارب المتتاليات التالية المعرفة بحدها العام

1) $u_n=\dfrac{3n+2}{2n-1}$ ، 2) $u_n=e^{1-n}$. 3) $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)$. 3) $u_n=\sqrt{\dfrac{n^2+2}{2n+3}}$

4) $u_n=\ln\left(3+e^{2-n}\right)$ (5.) . 5) $u_n=\dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$ 6) $u_n=\dfrac{e^{-n}-1}{2e^{-n}+1}$. 7) $u_n=\ln\left(\dfrac{e^n-3}{e^n+1}\right)$

8) $u_n=\ln\left(\dfrac{e^n+2}{e^{2n}+1}\right)$ ، 9) $u_n=(n+2)e^{-n}$ ، 10) $u_n=\dfrac{e^n-6}{2e^n+1}$ ، 11) $u_n=\dfrac{n\cos(2\pi n)}{n+1}$

التمرين (11) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+.......+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\dfrac{n}{n+1}\le u_n\le\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$

2) أدرس تقارب كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بـــ :

$$v_n=\frac{n}{n+\sqrt{n}} \text{ و } w_n=\frac{n}{n+1}$$

3) أستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

التمرين (12) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.......+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$$

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $\ln(x+1)\le x$

(يمكنك دراسة اتجاه تغير الدالة $f:x\to\ln(x+1)-x$)

2) استنتج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k ، $\ln(k+1)-\ln k\le\dfrac{1}{k}$

ثم من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(n+1)\le u_n$

3) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

التمرين (13) المتتالية العددية المعرفة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$

1 . f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$

- ادرس تغيرات الدالة f وارسم تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول : $2cm$

- باستعمال الرسم السابق أنشئ على محور الفواصل النقط A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 فواصلها على الترتيب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n \geq \sqrt{2}$

3. بيّن أنه من أجل كل $x \geq \sqrt{2}$ لدينا $f(x) \leq x$

4. أستنتج أن المتتالية متناقصة ابتداء من الرتبة الثانية .

5. بيّن أن المتتالية متقاربة .

6. لتكن l نهاية المتتالية (u_n) . بين أن l هو حل للمعادلة $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ واحسب قيمته .

التمرين (14) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1 **/** برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $0 \leq u_n \leq 2$.

2/ بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متــــــزايدة و ماذا تستنتج ؟

3/ أ- بيّن أن : $2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

ب- بيّن أن : $0 < 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم استنتج $\lim u_n$

المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية (تذكير وتدعيم)

التمرين (15) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و
$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 \end{cases}$$

1) عين الحدود v_2 ثم v_1 و v_3 وأساس المتتالية .

2) احسب الحد العام v_n بدلالة n .

3) عبر بدلالة n عن المجموع $s_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

4) عيّن العدد n بحيث يكون : $s_n = -10$

التمرين (16) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r .

أ- احسب u_1 و r علما أن : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 74 \end{cases}$

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $u_n > 5978$

2/ (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وأساسها q .

نضع : $s_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

عين v_1 و q حتى يكون $2s_n = n(3n + 7)$ من أجل كل n من N^*

التمرين (17) (u_n) متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r علما أن :

$$u_2+u_3+u_4=-15 \quad \text{و} \quad u_2^2+u_3^2+u_4^2=83$$

1/ احسب الحد u_3 ثم استنتج r و الحد الأول u_0 .

2/ عين الحد العام u_n بدلالة n ثم احسب المجموع $s_n=u_0+u_1+......+u_n$

التمرين (18) (u_n) متتالية حسابية حدودها الثلاثة الأولى u_1 ، u_2 ، u_3

تحقق الجملة : $\begin{cases} u_1-3u_2+u_3=-1 \\ u_1^2-u_3^2=-4\sqrt{2} \end{cases}$

1- أوجد كلا من : u_1 ، u_2 ، u_3

2- اكتب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S_n=u_1+u_2+.......+u_n$

ثم أوجد العدد الطبيعي k حتى يكون : $S_k-S_{(k-2)}=2+21\sqrt{2}$

3- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن العدد: $k^{4n+2}+2\times 3^{8n+1}$ يقبل القسمة على 5

التمرين (19) $(u_n)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث : $u_1=1$ و $u_3+u_5=20$

1 - أوجد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها وتقاربها

2- احسب بدلالة n المجموع : $G_n=u_1+u_2+.......+u_n$

3- احسب بدلالة n المجموع : $S_{n1}=u_1^2+u_2^2+u_3^2+......+u_n^2$

التمرين (20) 1) بين انه إذا كانت a ، b و c ثلاثة أعداد حقيقية حدود متعاقبة بهذا الترتيب

لمتتالية هندسية فإن : $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$

2) أوجد ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276

التمرين (21) (v_n) متتالية حدها الأول v_0 موجب تماما وحيث من أجل

كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}-v_n=0.02v_n$

1/ أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها . ما هو اتجاه تغير هذه المتتالية ؟

ب- عبر عن v_n بدلالة n و v_0 .

2/احسب S_n بدلالة n و v_0 حيث : $S_n=v_0+v_1+.....+v_{n-1}$

3/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n\geq 50v_0$

4/ بلغ عدد سكان بلد 30 مليون نسمة يوم 1 جانفي 2000 ، نفرض أن عدد السكان

يرتفع كل سنة بنسبة **2%** . - كم يبلغ عدد سكان هذا البلد يوم 1 جانفي 2020

التمرين (22) 1 **/**ما هي نهاية المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_0=0.57 \quad , u_n=0.\underbrace{57......57}_{\text{رقم } 2n} \quad ؟$$

2/ أستنتج الكتابة الكسرية للعدد الناطق التالي : $0.\overline{57}57..........$

التمرين (23) (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$\ln u_3 - \ln u_2 = 1 \text{ و } \ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11$$

1- عيّن أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 .

2- اكتب u_n بدلالة n ثم ادرس اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n).

3- احسب المجموع : $u_1+u_2+......+u_n$ بدلالة n

4– (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$

- أثبت أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S_n = v_0+v_1+v_2+.....+v_{n-1}$

التمرين (24) $(u)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية متناقصة حيث :

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84 \quad \text{و} \quad u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$$

1/ احسب الحدود : u_2 ثم u_1, u_3 والأساس r للمتتالية .

2/ عبّر عن u_n بدلالة n و ادرس تقارب المتتالية $(u)_{n\in N^*}$

3/ احسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = u_1 + u_2 + ...u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S$

4/ احسب بدلالة n المجموع S' حيث : $S' = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + ... + \dfrac{1}{u_n}$

التمرين (25) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية رتيبة تحقق : $u_2 \times u_4 = 256$ و $u_2 + u_3 + u_4 = 56$

1) عين الحدين u_3 و u_0 و الأساس q

2) أعط عبارة الحد العام u_n بدلالة n

3) نفرض $u_0 = 2$ و $q = 2$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) حيث : $v_n = 2u_n + n$

أ) ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

ب) احسب كلا من المجموعين : $s_n = u_0 + u_1 + ...+u_n$ و $L_n = 0+1+2+......+n$

ج) استنتج المجموع : $K_n = v_0 + v_1 + ...+v_n$

التمرين (26) **1/** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r .

أ- عيّن u_2 و r علمـــــا أن : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$

ب- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ...+u_n$.

2/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = e^{14-3n}$

أ- بيّن أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب- احسب المجموع $T_n = v_0 + v_1 + ...+v_n$ و الجـــــداء $P_n = v_0.v_1.v_2........v_n$

د – احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

التمرين (27) f دالة معرفة على ℝ بالعبارة : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

f' ، f'' ، $f^{(3)}$ ، ....، $f^{(n)}$ ترمز للمشتقات المتتابعة للدالة f حيث $n\geq 1$

1/ احسب f' ، f'' ، $f^{(3)}$.

2/ برهن بالتراجع انه من أجل كل $n\geq 1$ يكون : $f^{(n)}(x)=2^n.(1-n-2x)e^{2x}$

3/ $n\geq 1$، التمثيل البياني لـــ $f^{(n)}$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة M_n

أ) عيّن x_n و y_n إحداثيتا النقطة M_n و تحقق أن M_n تنتمي إلى المنحني (g)

الذي معادلته : $y=\dfrac{e^{2x}}{4^x}$.

ب)بيّن أن المتتالية (x_n) حسابية ، ماهي نهايتها

ج) بيّن ان المتتالية (y_n) هندسية ثم ادرس نهايتها.

التمرين (28) لتكن الدالة العددية f المعرفة على ℝ كما يلي : $f(x)=80+ae^{bx}$

حيث a و b عددان حقيقيان .(C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

عين a و b بحيث تكون النقطتان $A(0;53)$ و $B(3;60)$ نقطتان من (C) .

تعطي القيم الحقيقية للعددين a و b ثم تعطي القيمتين المدورتين إلى 10^{-1} لهما .

2 – يعطي إنتاج شركة في اليوم n (n عدد طبيعي غير معدوم)

بالعبارة : $u_n=80-27.e^{-0,1n}$ و حدة خلال بداية انطلاقها .

أ – بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب – بعد كم يوم تزيد كمية الإنتاج على 72 وحدة .

3 – نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة بالعبارة : $V_n=e^{-0,1n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

أ – برهن أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

ب – احسب: $S=V_1+V_2+...+V_{10}$.

ج – ما هو إنتاج الشركة في مدة 10 أيام حيث تعطي قيمة مدورة إلى الوحدة لهذا الإنتاج

التمرين (29) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+.........+\frac{1}{4^n}=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{4^k}$$

1/ ما هو اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ؟

2/ برهن أنه لكل عدد طبيعي n يكون : $u_n=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

3/ ما هي نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ؟

4/ نضع : $M=1.333\,333\,333$ هل العدد الحقيقي M حاد من الأعلى للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

المتتاليات التراجعية من الشكل : $u_{n+1} = f(u_n)$

التمرين (30) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$

1/بيّن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 2$

2/ ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ واستنتج أن $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة واحسب $\lim u_n$

3/ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

أ- بيّن أن المتتالية (v_n)حسابية حدد أساسها وحدها الأول

ب- احسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى .

التمرين (31) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2$ و $u_0 = 1$

1) ارسم المستقيمين (D) ذي المعادلة $y = \dfrac{3}{4}x + 2$ و (Δ) ذي المعادلة : $y = x$ في معلم متعامد ومتجانس . عين A نقطة تقاطعهما ولتكن a فاصلة النقطة A .

2) مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5

3) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ وتقاربها.

4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 8$

5) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$. هل $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ متقاربة ؟

6) أ) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = u_n - a$ ، برهن ان (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين (32) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

1- أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$

ب) برهن أن (u_n) متزايدة . ماذا تستنتج ؟ احسب $\lim u_n$

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي : $f(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$

أ) عين العدد الحقيقي a بحيث : $f(a) = a$

ب) نضع $v_n = u_n - a$ من اجل كل عدد طبيعي n ، بين أن (v_n) متتالية هندسية

ج) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

د) استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

3- احسب المجموعين : $s_n = v_0 + v_1 + ...+ v_n$ و $s'_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$

التمرين (33) (u_n) متتالية عددية معرفة بـــ $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

1/ احسب الحدود : u_1 ، u_2 و u_3 وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n)

2/ أثبت أنه لكل عدد طبيعي n فإن : $u_n < 1$

3/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). بيّن أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

4/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـــ : $v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$

أ) احسب الحدود : v_0 ، v_1 و v_2 .

ب) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها .

ج) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

5/ احسب المجموع $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و n الجداء : $\Pi_n = u_1 u_2 ...... u_n$.

التمرين (34) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $(n\in \mathbb{N})$ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 1}{u_n + 4} \end{cases}$

1/ أ- احسب u_1 و u_2

ب-بيّن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$

ج- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ ثم أستنتج أنها متقاربة

2/ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة لكل عدد طبيعي n بـــ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- احسب v_n بدلالة n

ج- استنتج أن : $u_n = \dfrac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}$ ثم احسب $\lim u_n$

3/ احسب بدلالة n كلا من : $s_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2$ و $p_n = v_0 . v_1 . v_2 ...... v_n$

التمرين (35) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$

1) أحسب: u_1, u_2 2) أثبت أن: $u_n \neq -2$ لكل عدد طبيعي n

3) لتكن المتتالية العددية (t_n) المعرفة كما يلي: $t_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ) أثبت أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس.

ب) أحسب t_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين (36) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول $u_0 = 24$ وبعلاقة التراجع الآتية :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 16$$ من أجل كل عدد طبيعي n

1/ احسب u_1 ، u_2

2/ نضع : $v_n = u_n - a$ حيث a عدد حقيقي

- أوجد العدد الحقيقي a حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3/ لتكن المتتالية العددية (t) المعرفة بـــ : $t_n = u_n - 20$

أ-أثبت أن المتتالية (t) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها

ب- احسب t_n ثم u_n بدلالة n ادرس تقارب $(u_n)_{n\in N}$

4/ احسب المجموع $s_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$

التمرين (37) $(u_n)_{n\in N}$المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $4u_{n+1} = u_n - 4$

1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n + 4 \geq 0$

2/ برهن أن المتتالية(u_n) متناقصة تماما وماذا تستنتج ؟

3/ (v_n) متتالية عددية معرفة بـــــ : $v_n = 3u_n + a$

أ- عين العدد الحقيقي a حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية – عين أساسها وحدها الأول

ب - أحسب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج أنها متقاربة

4) احسب المجموع : $S = \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k^3$ و الجداء : $\prod_{k=0}^{k=n-1} v_k$

التمرين (38) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$$

1/ لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \dfrac{8x-6}{x+1}$

أ) ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ثم استعمل المنحني (C_f) لرسم النقاط A_1 ، A_2 ، A_3 التي فواصلها u_1 ، u_2 ، u_3 على الترتيب . ب) برهن أن $(u_n)_{n\in N}$ متناقصة تماما وأنها محدودة من الأسفل بالعدد 6

جـــ) ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية $(u_n)_{n\in N}$.

2/ أ) اثبت المتراجحة التالية : $|u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7}|u_n - 6|$

ب) استنتج من جديد أن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة.

3/ لتكن المتتـــــــــــــــــــــــــــالية (v_n) حيث : $v_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية . ب) احسب u_n بدلالة n ، جـــ) استنتج أن (u_n) متقاربة

التمرين (39) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{2x-16}{x-6}$

1/ أ-ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ وحدة الطول : $2cm$

ب- باستعمال الرسم السابق أنشئ على محور الفواصل النقط A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 فواصلها على الترتيب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وتقاربها.

2 / $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n-16}{u_n-6}$

أ- اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

ب- اثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 4 وماذا تستنتج ؟

3/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=\frac{1}{u_n-4}$

أ) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية .

ب) اكتب v_n ثم u_n بدلالـــــــــــة n . جـ) أوجد نهاية (u_n)

التمرين (40) a عدد حقيقي حيث : $0 < a < \frac{\pi}{4}$. $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_1=1+\frac{1}{2\sin^2(a)}$ و $u_{n+1}=u_n.\cos(2a)+1$ لكل عدد طبيعي n غير معدوم.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n > 1$

2/ نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_n=u_n-\frac{1}{2\sin^2(a)}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية واكتب u_n بدلالة n و a

ب) هل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ؟ علل جوابك

3/ نضع : $S_n=u_1+u_2+........+u_n$. احسب S_n بدلالة n و a ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين (41) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{3}{2} \\ u_{n+1}=(u_n-1)^2+1 \end{cases}$$

1) أ- أثبت بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq\frac{3}{2}$

ب-أدرس اتجاه تغير (u_n) ثم استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

2) أ-نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=e^{v_n}+1$ بين ان (v_n) متتالية هندسية ،

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ب- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{2}\right)^k v_k$

متتاليات تراجعية من أشكال أخرى

التمرين (42) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+n^2)$

1/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي : $v_n=u_n-\left(\frac{n^2-3n+3}{2}\right)$

أ) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ثم ادرس تقارب (u_n)

2/ برهن بالتراجع أن لكل عدد طبيعي n : $1^2+2^2+........+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3/ استنتج المجموع $S_n=u_0+u_1+........+u_n$ بدلالة n

التمرين (43) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ وبعلاقة التراجع الآتية :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1/ احسب u_1 ، u_2

2/ نضع : $v_n=u_n+an$ حيث a عدد حقيقي

- أوجد العدد الحقيقي a حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3/ لتكن المتتالية العددية (t_n) المعرفة بـــ : $t_n=u_n-\frac{2}{3}n$

أ- أثبت أن المتتالية (t_n) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها

ب- احسب t_n ثم u_n بدلالة n

4/ احسب المجموع S_n حيث : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$

التمرين (44) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ بحيث : $u_1=6$ ، $u_0=20$

$u_{n+1}=\frac{-1}{20}u_n+\frac{1}{20}u_{n-1}$

1/ بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية وان المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية يطلب تعيين الأساس والحد الأول لكل منهما بحيث : $v_n=u_{n+1}+\frac{1}{4}u_n$ و $w_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ لكل n من N

2/ أ- اكتب كلا من v_n و w_n بدلالة n . ب- استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim u_n$.

3/ احسب $S_n=u_0+u_1+........+u_n$ بدلالة n واستنتج $\lim S_n$

التمرين (45) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ ، } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

1/ لنعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على N حيث : $w_n = u_{n+1} - 9u_n$

- أثبت أن (w_n) متتالية ثابتة يطلب تعيين قيمتها واستنتج أن : $u_{n+1} = 9u_n + 1$

2/ لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

أ) برهن أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب)استنتج u_n بدلالة n وبرهن بالتراجع أن : u_n عدد طبيعي

3/ احسب العددين : S_n و S'_n حيث : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ و $S'_n = \sum_{r=0}^{r=n} v_r^2$

المتتاليات المتجاورة

التمرين (46) $(\mathbf{u_n})$ و $(\mathbf{v_n})$ متتاليتان معرفتان كما يلي : $u_n = \frac{-2}{n}$ ، $V_n = \frac{1}{\ln n}$ ، $n > 1$

1 – ادرس اتجاه تغير كل من $(\mathbf{u_n})$ و $(\mathbf{v_n})$.

2 – احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$ .3 – هل المتتاليتان $(\mathbf{u_n})$ و $(\mathbf{v_n})$ متجاورتان ؟

التمرين (47) المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان كما يلي :

$u_0 = -1$ ، $v_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

2)برهن ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

3) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n + \frac{5}{2}v_n$

أ- بين أن المتتالية (w_n) ثابتة . ماهي نهايتها

ب- استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n)

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $x_n = u_n + av_n$ و $y_n = u_n + bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين .

أ- جد a و b حيث تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتين ثم عبر عن u_n و v_n بدلالة n

ب- جد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

التمرين (48) $(\mathbf{u_n})$ و $(\mathbf{v_n})$ متتاليتان معرفتان بـــ : $U_n = Ln(n), V_n = Ln(n+1)$ و $n > 0$.

1 - ادرس اتجاه تغير كل من $(\mathbf{u_n})$ و $(\mathbf{v_n})$.

2- احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.- هل المتتاليتان $(\mathbf{u_n})$ و $(\mathbf{v_n})$ متجاورتان؟ .

التمرين (49) (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان بـــ:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{V_n + U_n}{2} \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \dfrac{V_n + U_{n+1}}{2} \end{cases}$$

1/ احسب : U_1 وV_1 و U_2 وV_2

2/ لتكن المتتالية (W_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـــــ: $W_n = V_n - U_n$

أ) برهن أن (W_n) متتالية هندسية . ب) عبر عن W_n بدلالة n

3/ ادرس اتجاه كل من (U_n) و (V_n) ثم برهن أنهما متجاورتان

4/ لنفرض المتتالية (T_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـــــ: $T_n = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}$

أ) بـــرهن أن المتتالية (T_n) ثابتة . ب) استنتج U_n و V_n بدلالة n

ج) احسب نهاية كل منهما بطريقتين

التمرين (50) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in N}$ المعـــرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$

1/ ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{6-x}$ وحدد $f([0,6])$

2/ بين أن $0 \le u_n \le 6$ لكل عدد طبيعي n.

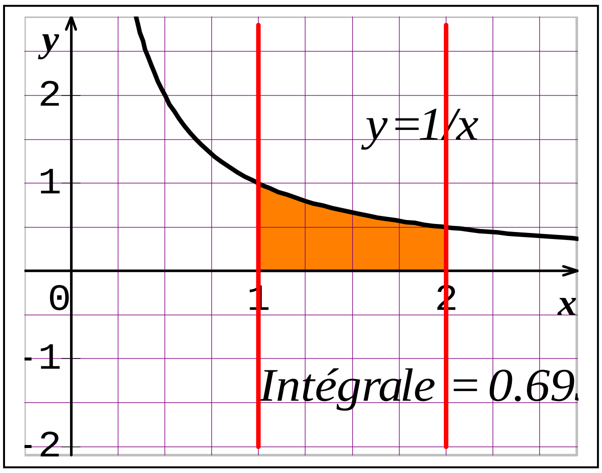
3/ نضع : $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$.

- بين أن $v_n \le w_n$ (لكل عدد طبيعي n) و أن (v_n) متزايدة و (w_n) متناقصة

4/ بين أن $\left|u_{n+1} - 2\right| \le \dfrac{1}{2}\left|u_n - 2\right|$ (لكل عدد طبيعي n) واستنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

5/ بين أن (v_n) و (w_n) متجاورتان وحدد نهايتهما المشتركة

التمرين (51) الجزء الأول . (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان بـــ:



$U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ و

$V_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{2n-1}$

1) برهن ان المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

الجزء الثاني .

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ حيث أن : $f(x) = \ln(x)$.

1- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $1 - \dfrac{1}{x} \le \ln(x) \le x - 1$.

2 - أثبت $U_n \le \ln(2) \le U_n + \dfrac{1}{2n}$. 3- أثبت أن (U_n) تتقارب نحو $\ln(2)$.

{ التدريب على حل تمارين بكالوريات }

التمرين (01) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$ و $u_0=\frac{5}{2}$

1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

جـ - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة

جـ - هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين (02) 1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$.

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب- عين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين (03) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$.

يرمز (C) إلى منحني f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

(الوحدة على المحورين $2cm$)

1) احسب $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و فسر النتيجة هندسيا.
- ادرس تغيرات الدالة f .
- باستعمال منحني دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحني (C)
- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$.

2) نعرف المتتالية (U_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالأتي : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

أ- باستعمال (D) و (C) مثل الحدود U_0 ، U_2 ، U_3 على محور الفواصل

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \le U_n \le 5$ و $U_{n+1} \succ U_n$

ب- استنتج أن (U_n) متقاربة . احسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

التمرين (04)

(U_n) المتتالية المعرفة بحده الأول $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1- احسب U_1 ، U_2 و U_3.

2- (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .
- استنتج عبارة U_n بدلالة n
- احسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

3- (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث : $S = W_0 + W_1 + W_2 + ... + W_n$

التمرين (05) 1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$

C_f منحني f في المستوي المنسوب لمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. (وحدة الأطوال $2cm$)

أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

ب- ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـــ - بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحني C_f ثم ارسم C_f و (D).

د- بيّن أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدها الأول $U_0=1$ و من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_{n+1}=f(U_n)$.

أ- باستخدام C_f و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ، مثل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل (ox) .

ب- خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (U_n) .

جـــ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1\le U_n\le \frac{5}{2}$ و أن المتتالية (U_n) متزايدة.

د-استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

التمرين (06) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ كما يأتي : $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$.

ب- أنشئ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (الوحدة على المحورين $4cm$)

ج- برهن أنه إذا كان $x\in[0;2]$ فإن $f(x)\in[0;2]$.

2/ نعرف المتتالية العددية (U_n) على $\mathbb{N}$ كالأتي : $\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

أ- برر وجود المتتالية (U_n) . احسب الحدين U_1 و U_2

ب- مثل الحدود U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحني (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$.

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (U_n) وتقاربها انطلاقا من التمثيل السابق .

3/ أ- برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أن : $0\le U_n\le\sqrt{3}$.

ب- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $U_{n+1}\succ U_n$.

ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

ج- تحقق أن : $U_{n+1}-\sqrt{3}\le\frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}\left(U_n-\sqrt{3}\right)$ من أجل عدد طبيعي n غير معدوم .

عيّن عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث : $\left|U_{n+1}-\sqrt{3}\right|\le k\left|U_n-\sqrt{3}\right|$

بيّن أنه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $\left|U_n-\sqrt{3}\right|\le k^n\left|U_0-\sqrt{3}\right|$

استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

التمرين (07) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$

1- أحسب u_1

2- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 < u_n < 4$

ب) بين أن (u_n) متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4- أحسب بدلالة n كلا من : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$

التمرين (08) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ (u_{n+1})^2 . e = u_n \end{cases}$$

نعتبرالمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي : $v_n = \dfrac{1+\ln u_n}{2}$

1/ أثبت أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2/ اكتب v_n ثم u_n بدلالة n . 3/ ادرس تقارب المتتالية (u_n)

4/ احسب المجموع S بدلالة n حيث : $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$

5/ ما هي طبيعة المتتالية (t_n) حيث : $t_n = \ln u_n$

التمرين (09) لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب w_n بدلالة n .ما هي نهاية (w_n)؟

3) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

4) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.ثم استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

التمرين (10) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N^*}$ المعرفة كما يلي :

$$u_1 = -1$$
$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

1/ برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

2/ ادرس رتابة المتتالية (u_n) . استنتج أن (u_n) متقاربة احسب نهايتها

3/ نضــــع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = n(3-u_n)$

أ) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم جد نهاية المتتالية (u_n) من جديد

4/ احسب المجموعين : $S_1 = v_1 + v_2 + ...+ v_n$ و $S_2 = v_1^2 + v_2^2 + ...+ v_n^2$

التمرين (11) **1–** $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln u_2 - \ln u_4 = 4 \text{ و } \ln u_1 + \ln u_5 = -12$$

- عيّن أساس هذه المتتالية الهندسية وحدها u_0 . احسب u_n بدلالة n
- نسمي S_n المجموع : $u_0 + u_1 + ...+ u_n$. احسب S_n بدلالة n ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

2- $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

- بيّن أن $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.
- نسمي T_n المجموع : $v_0 + v_1 + ...+ v_n$. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون : $T_n^{\ 2} = 2^{30}$

التمرين (12) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = e^3 - 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $e^3 u_{n+1} = 1 - e^3 + u_n$.

1- احسب الحدود : u_1 و u_2 و u_3

2- أثبت أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $1+u_n \succ 0$

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .ماذا تستنتج بخصوص تقارب (u_n)؟

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2(1+u_n)$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- احسب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج- عين مجموعة العداد الطبيعية n حتى يكون : $v_n \geq 2\times 10^{-9}$

التمرين (13) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول u_0 وبعلاقة التراجع الآتية :

$u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 2}{u_n + 8}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نفرض في ما يلي : $u_0 = 0$

أ) احسب u_1, u_2 ثم أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها.

ب) عبّر عن u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n)

جـ) احسب كلا من S_n وَ P_n إذا علمت أن :

$$S_n = v_0 + v_1 + ...+ v_n \quad \text{و} \quad P_n = v_0 \times v_1 \times ....\times v_n$$

التمرين (14) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$u_0=1$ ، $u_1=2$ ولكل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

1- احسب الحدين u_3 ، u_4

2- لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=2^n v_n$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n=3$

ب- استنتج طبيعة المتتالية (v_n) ثم اكتب v_n بدلالة n

ج- استنتج u_n بدلالة n .

3- نريد دراسة تقارب المتتالية (u_n)

أ- برهن أنه لكل عدد طبيعي n $(n\geq 3)$: $4\times 2^n\geq n^2$ و $\frac{n}{2^n}\leq\frac{4}{n}$

ب- احسب عندئذ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}$ ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

التمرين (15) I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج أن : $e^{-x}+x\geq 1$ لكل $x\in\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1)عيّن مجموعة تعريف الدالة f

1) بيّن أن : $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$ لكل $x\in\mathbb{R}^*$.

2) بيّن ان : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ثم فسّر هندسيا النتيجة.

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة O .

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المماس (Δ). جـ) أنشئ (Δ) و (C_f) .

III) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي :

$U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل $n\in\mathbb{N}$

1)بيّن بالتراجع أن : $0\leq U_n\leq 1$ لكل $n\in\mathbb{N}$

2) بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة

3) استنتج ان (U_n) متقاربة ثم حدّد نهايتها.

التمرين (16) I) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$ و (C) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

1) أ – تحقق من أن : $\frac{1}{e^{x}+1}=1-\frac{1}{e^{-x}+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب – استنتج أن f فردية

2) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أ- بين أن : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^{+}$

ج – استنتج ان : $1-\frac{2}{e^{x}+1}\leq\frac{1}{2}x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

4) بيّن ان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

5) أنشئ في المعلم المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أنشئ المنحني (C)

II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين بالتراجع أن : $u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) أ- تحقق باستعمال نتيجة السؤال الثالث ج من الجزء الأول ، أن : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب- استنتج ان المتتالية (u_n) متناقصة .

3) بيّن أن : $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين (17)

نعرّف متتالية (u_n) على المجموعة N بـــ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n-2u_{n+1}=2n+3$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{-n}-2n+1$

2. (v_n) متتالية معرفة علىN بـــ : $v_n=u_n+tn-1$.

أ ـــ بيّن أنّه إذا كان $t\neq 2$ ، فإن المتتالية(v_n) تكون متباعدة .

ب ـــ أثبت أنّه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها

جـــ ـــ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B ، C و G حيث :

$2\vec{GA}+3\vec{GB}+l\vec{GC}=\vec{0}$ مع l عدد حقيقي.

عيّن l حتى تكون النقطة G مرجحا للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 و S_2 على الترتيب

التمرين (18) 1 تعيين حصر للعدد e^x .

1) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على ℝ بـ : $f(x)=e^x-(1+x)$.
أدرس تغيرات الدالة f .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1+x\le e^x \ldots (1)$.

3) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أصغر تماما من 1 $(x<1)$:

$$e^x \le \frac{1}{1-x} \quad \ldots (2)$$

2. تعيين حصر للعدد e . n عدد طبيعي غير معدوم .

1)باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أن : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$.

2) باستعمال المتباينة (2) ، أثبت أن : $e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. e نهاية متتالية.

(u_n)متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، كما يلي :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1)أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0\le e-u_n\le\frac{3}{n}$.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو e .

الهدية

هذه مجموعة توجيهات أضعها بين أيديكم يا طلبتنا الكرام

1/ ضروري المزيد من شحذ الهمة و التوق للالتحاق بمدرجات الجامعة
2/ ضروري ضبط جدول وعمل منظم بقصد الاستغلال الجيد للفترة المتبقية للمراجعة ولها أهميتها إن أحسن استغلالها
3/ الجدول يكون متوازن وعدم إهمال مواد او تركها بحجة من الحجج
4/ الاستعانة بحل النماذج السابقة في كل مادة
5/ ضبط كراس التلخيص او المعارف في كل مادة
6/ الابتعاد عن الزملاء ذوي العزائم الضعيفة
7/ كن صاحب أمل وثقة في الله و أسأله العون وأعلم دراستك بنية حسنة هي عبادة وهي من بر الوالدين لأن إدخال السرور عليهما امر مشهود له فكيف بنجاحك في شهادة البكالوريا
8/ أعلم أن النجاح في البكالوريا امتحان والامتحان تكون 80 بالمئة من أسئلته مناسبة لعموم الطلبة و الالتحاق بالتخصص المرغوب فيه مسابقة
9/ عدم إهمال اللغات الأجنبية لأن لها تأثير كبير على النجاح ونوعه وعلى الأقل التخفيف من حدة الضعف
10/ ابتعد عن السهر المفرط واجتهد في البكور فإن فيه البركات ومشهود له في المأثور
يتبع ... http://www.qahtaan.com/works/up/get.php?hash=58cdfhkoqu1238518064