إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: ذوالقعدة 1431 هـ

الدالة الأسية [II]

Fonction Exponentielle

تمرين1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f.

- اكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathscr{C})$.
- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أثبت أن النقطة $\omega(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.

- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ω.
- ارسم المماس (T) و المنحني $(\mathscr{C})$.

3- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=f(x)+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

- بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $g'(x)=\dfrac{3(e^{2x}-1)^2}{2(1+e^{2x})^2}$
- احسب $g(0)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.
- ادرس إشارة $g(x)$ واستنتج وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ(T).

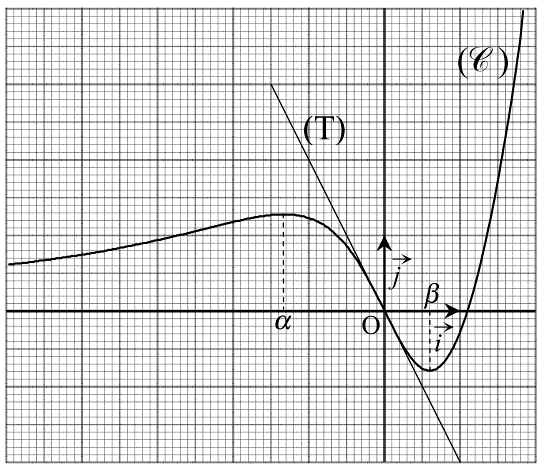
تمرين2

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x-x$.
ادرس اتجاه تغير الدالة g، شكل جدول تغيراتها، ثم بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $g(x)>0$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{e^{2x}-4e^x+3}{e^x-x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ المبين أسفله، والمستقيم (T) هو المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند المبدأ.



1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة: $e^{2x}-4e^x+3>0$ ثم استنتج إشارة الدالة $f(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

باستعمال القراءة البيانية:

3- أعط حصرا سعته 0,2 للعددين الحقيقيين α و β الموافقين للقيمتين الحديتين المحليتين للدالة f على $\mathbb{R}$.

4- عين قيم كل من: $f'(\alpha)$ ، $f'(0)$ و $f'(\beta)$.

5- ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمماس (T).

6- لتكن الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

- أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;0[$.
- استنتج جدول تغيرات الدالة h.

تمرين3

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=(x^2+x+2)e^{-x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (نذكّر أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}=0$ حيث n عدد طبيعي). استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا يطلب كتابة معادلته.

2- أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) اكتب معادلة المماس (T) لـ$(\mathscr{C})$ عند $x_0=0$.

ج) بين أن المعادلة: $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1\,;0]$. أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

3- أ) بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

ب) ارسم المماس (T) و المنحني $(\mathscr{C})$.

4- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[-1\,;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=[f(x)]^2$

أ) بين أن الدالة g عبارة عن مركب دالتين، إحداهما الدالة f أي: $g=uof$ ، يطلب تعيين الدالة u.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ج) أنشئ جدول تغيرات g انطلاقا من جدول تغيرات f .

5- m وسيط حقيقي. نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f_m(x)=(x^2+mx+2)e^{-x}$$

عين قيم m حتى تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين محليتين.

تمرين4

I- a و b عددان حقيقيان ولتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$:
$g(x)=(ax+b)e^{x}-1$.

تعطى تغيرات الدالة g في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

1- باستغلال الجدول بين أن $a = 1$ و $b = -1$.

2- بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,27<\alpha<1,28$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$f(x)=\frac{e^{x}-2x+1}{x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فإن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^{2}}$.
استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$.

2- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أثبت أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين، وأنه يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه حامل محور التراتيب.

4- بين أن $f(\alpha)=-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

5- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $x_0=1$.

6- احسب $f(-3)$، $f(-1)$، $f\left(\frac{1}{2}\right)$، $f(2)$ و $f(3)$ ثم ارسم المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الرسم: 1cm).

تمرين5 (بكالوريا)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=2x+1-xe^{x-1}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$ (يمكن كتابة $xe^{x-1}=\frac{1}{e}xe^{x}$).

2- أثبت أن المستقيم Δ ذي المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $-\infty$، ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم Δ.

3- أ) احسب المشتقة f' والمشتقة الثانية f'' للدالة f.

ب) شكل جدول تغيرات f' مع تحديد نهاية f' عند $-\infty$.

ج) احسب $f'(1)$ واستنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f.

4- ليكن I المجال $[1,9\ ;\ 2]$. أثبت أنه على I، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

5- ارسم المستقيم Δ والمنحني $(\mathscr{C})$ (وحدة الرسم: 2cm).

تمرين6 (بكالوريا بتصرف)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$$

1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة g.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فإن: $g(x)>0$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ f(0)=0 & \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=0$.

2- ادرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=0$ ثم بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نصفي مماسين Δ و Δ' يطلب كتابة معادلتيهما.

3- أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فإن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

4- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5- احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$

(ضع $X=\frac{1}{x}$). استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$.

6- ارسم Δ، Δ' والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول 4cm)

7- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ h(0)=0 & \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C}')$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

تحقق أن: $h(x)=-f(-x)$ ثم بين أن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ متناظران بالنسبة للمبدأ. استنتج رسم المنحني $(\mathscr{C}')$.