إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: ربيع الثاني 1432 هـ

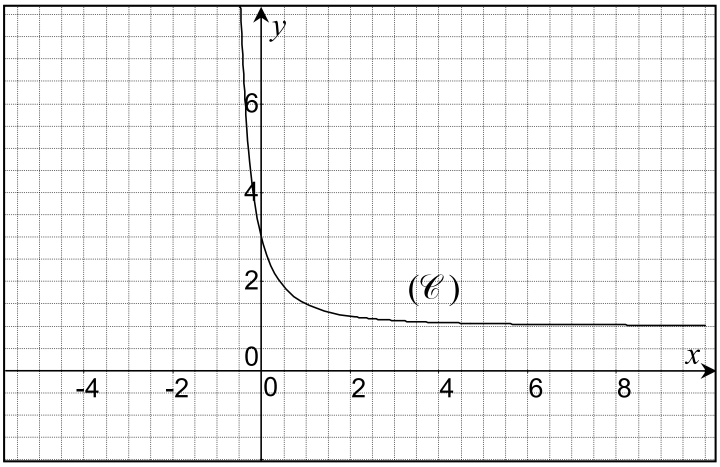
حساب المساحات

Calculs d'aires

تمرين1

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1\,;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1}$ وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس المبين أسفله.



1- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>-1$ فإن: $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$.

2- احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=0$.

3- احسب $\mathrm{I}=\int_0^3\dfrac{2}{(x+1)^2}dx$. أعط تفسيرا بيانيا لـ I.

1,5 u.a	*2,5 u.a*

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty\,;2]$ بـ:

$$f(x)=(x^2-x-1)e^x$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا يطلب كتابة معادلته.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) عين نقاط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع المحورين ثم ارسم $(\mathscr{C})$.

2- g دالة معرفة بـ: $g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل $x\le 2$ تكون الدالة g دالة أصلية للدالة f.

3- احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=0$ ، $x=1$.

4- احسب $\mathrm{I}=\int_{-2}^{0}f(x)dx$. هل I يعبّر عن مساحة؟ علل.

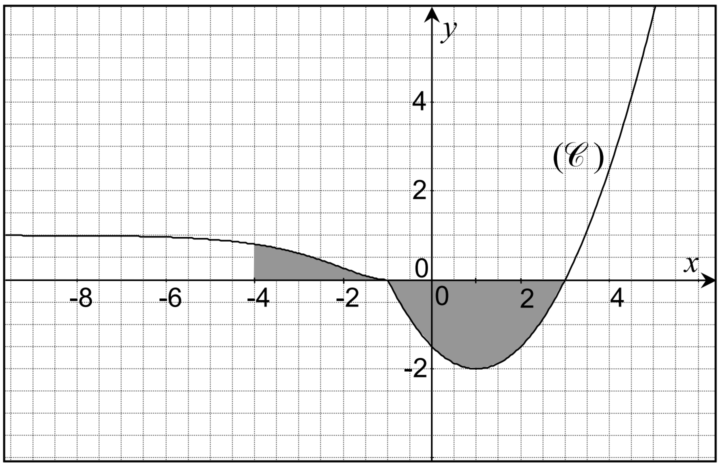
$2-12e^{-2}$	*2 u.a*	*2 ; −3 ; 1*

تمرين3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{2} & x\ge -1\\[2mm] xe^{x+1}+1 & x\le -1\end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني المبين أسفله.



1- باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب $\int_{-4}^{-1}xe^{x+1}dx$.

2- احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=-4$ و $x=3$.

$\dfrac{19+15e^{-3}}{3}$ *u.a* $\approx$ *6,58 u.a*	$-2+5e^{-3}$

تمرين4

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-\frac{4}{e^x-1}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته $y=x$.

– ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ).

– ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- برهن أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل عند نقطة فاصلتها α حيث: $1{,}3<\alpha<1{,}4$. ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

3- عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ فإن: $f(x)=ax+b+\dfrac{ce^x}{e^x-1}$

4- احسب المساحة $A(\lambda)$ $(\lambda>\ln 2)$ لمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $\ln 2\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le x$. احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

– بيّن أن $A(\alpha)=-4(\alpha+\ln\alpha-3\ln 2)$. احصر $A(\alpha)$.

4ln2 u.a	*4[-λ+ln2+ln(e^λ-1)] u.a*

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1\,;\,1]$ بـــ:

$$f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}+x$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1– شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم بيانها $(\mathscr{C})$.

2– احسب $\mathrm{I}=\int_{-1}^{0}(x+1)\sqrt{x+1}\,dx$. فسر بيانيا I.

0,4 u.a

تمرين 6

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$g(x)=x^2+x-2 \qquad f(x)=-x^2+2x-1$$

1– شكل جدول تغيرات كل من f و g ثـم ارسـم بدقـة بيانيهما $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ على الترتيـب فـي معلـم متعامـد ومتجانس حيث وحدة الطول 2cm.

2– ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ$(\mathscr{C}')$. حدد نقطتي تقاطعهما.

3– احسب بـــ cm^2 المساحة $\mathcal{A}$ لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي بحيث: $g(x)\le y\le f(x)$.

$4{,}5\ cm^2$

تمرين 7

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\frac{1+2\ln x}{x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1– احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج أن المنحنـي $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلتيهما.

– ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

– ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لحامل محور الفواصل.

– ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$. وحدة الطول 2cm.

2– احسب بـــcm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=\frac{1}{e}$ و $x=\sqrt{e}$.

$5\ cm^2$

تمرين 8

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=2\cos^2 x-2\cos x-1{,}5$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1– شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم بيانها $(\mathscr{C})$.

2– احسب المساحة $\mathcal{A}$ لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ حيث:

$-\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$ و $f(x)\le y\le -f(x)$.

$\frac{4\pi}{3}+5\sqrt{3}\ u.a$

تمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\frac{x+1}{x}+\ln x$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1– ادرس النهايات، اتجاه تغير الدالة f ثم شـكل جـدول تغيراتها. احسب $f(2)$ و $f(6)$ ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

2– n عدد طبيعي غير معدوم. احسب المساحة u_n للحيـز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمسـتقيمين اللـذين معادلتاهما: $x=n$ و $x=n+1$.

– احسب: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

(n+2)ln(n+1)	*(n+2)ln(n+1) – (n+1)ln(n)*

تمرين 10 *Bac S Antilles-Guyane 2005*

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـــ:

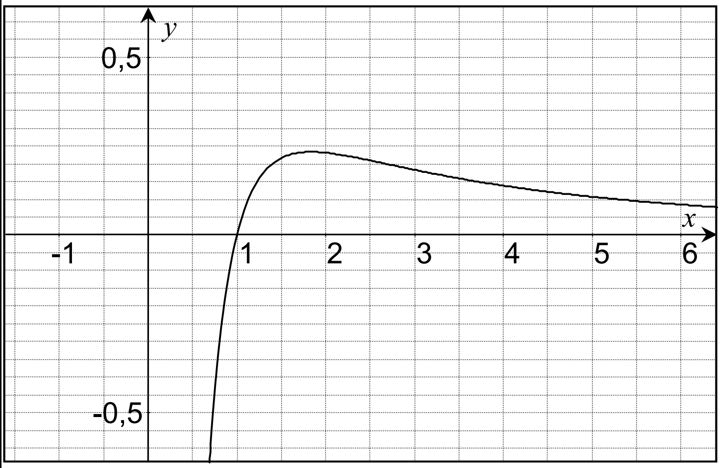
$$f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$$

1– بيّن أنه من أجل كل $x>1$ ، $\frac{\ln x}{x^2}\le f(x)\le\frac{\ln x}{x}$.

2– أ) احسب $\mathrm{I}=\int_2^4\frac{\ln x}{x}dx$ و $\mathrm{J}=\int_2^4\frac{\ln x}{x^2}dx$ (يمكن استعمال المكاملة بالتجزئة لحساب J).

ب) استنتج حصرا لــ $\mathrm{K}=\int_2^4 f(x)\,dx$.

3– الشكل التالي يمثل منحنى الدالة f (الوحدة هي 1cm على محور الفواصل و 4cm على محور التراتيب). نعتبر مجموعة النقط $M(x\,;y)$ حيث: $2\le x\le 4$ و $0\le y\le f(x)$. نرمز بـــ $\mathcal{A}$ إلى مساحتها.



باستعمال الحصر الموجود في السؤال 2– ب)، أعط حصرا لـــ $\mathcal{A}$ بـــ cm^2.

$1<\mathcal{A}<2{,}883\ cm^2$	*$\frac{1}{4}$*	*$\frac{3(\ln 2)^2}{2}$*

عبد المطلب