

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (05)

السنة الدراسية: 2008/2007

المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

اعداد الأستاذ
حليلات عمارة

و تقني رياضي

المحور: الأعداد المركبة

تمرين مدخل للأعداد المركبة : مثال بومبيلي (Bombelli) .

الهدف من هذا النشاط هو حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : (1) $x^3 = 15x + 4$

(1) أثبت أن $\alpha + \beta$ حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا: (2) $\alpha^3 + \beta^3 + 3(\alpha\beta - 5)(\alpha + \beta) - 4 = 0$

(2) ما هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد $\alpha\beta$ حتى تكتب المعادلة (2) على الشكل $\alpha^3 + \beta^3 = 4$ ؟
ما هي قيمة $\alpha^3\beta^3$ في هذه الحالة؟

(3) تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(x - \alpha^3)(x - \beta^3) = x^2 - 4x + 125$ ،

(4) نعتبر المعادلة $x^2 - 4x + 125 = 0$. . . (3) تأكد أن هذه المعادلة لا تقبل حولا حقيقية .

(5) نتخيل عدد نرمل له " i " حيث $i^2 = -1$

أكتب حلول المعادلة (3) في هذه الحالة .

أحسب $(2-i)^3$ و $(2+i)^3$ ، استنتج حلا حقيقيا للمعادلة (1). ثم عين حلول المعادلة (1).

الجزء الأول : العمليات على الشكل الجبري

التمرين (01) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$z_4 = (3-2i)^3 , z_3 = (2-i)^2(1+2i)^2 , z_2 = (4+2i)(4-2i) , z_1 = (2+i)^2$$

$$z_9 = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} , z_8 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} , z_7 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} , z_6 = \frac{4-6i}{3+2i} , z_5 = \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

التمرين (02) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات ذات المجهول z التالية :

$$\frac{z+1}{z-1} = 2i / 3 , (3-4i)z^2 = iz / 2 , 3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i / 1$$

التمرين (03) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات ذات المجهول z التالية :

$$(1+i)z - (2-i)\bar{z} + 3 + 4i = 0 / 2 , z^2 + z\bar{z} - 4 - 6i = 0 / 1$$

$$(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0 / 4 , \frac{\bar{z}-1}{z+1} = i / 3$$

التمرين (04) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

$$\text{نضع } L = \frac{z+1}{z-1} \text{ و } M' \text{ صورة العدد المركب } L .$$

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

أ - يكون L عددا حقيقيا .

ب - يكون L عددا تخيليا صرفا .

ج - تكون النقط O ، M و M' في استقامة .

التمرين (05) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

$z = x + iy$ عدد مركب حيث $z \neq 2i$ و x ، y عدنان حقيقيان .

$$\text{نعتبر العدد المركب } L \text{ حيث } L = \frac{z-2+i}{z+2i}$$

(1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

(2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

(3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا .

(4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (06) (06) /1 حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 2i\bar{z} = 0$ (1)

/2 نسمي O ، A ، B ، C صور حلول المعادلة (1) في المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$. أثبت أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

التمرين (07) /1 حل في \mathbb{C}^2 الجملة التالية:

$$\begin{cases} iz_1 + (1-i)z_2 = -4-3i \\ (1+i)z_1 + 2iz_2 = 13+9i \end{cases}$$

نسمي A و B صور الحلول z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المركب المنسوب لمعلم

متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$. ونسمي C صورة العدد z حل المعادلة التالية: $(3-i)\bar{z} + 5-i = 6+2i$

/2 عين طبيعة المثلث ABC . /3 عين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين (08) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

A ، M و M' نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، z و $1+z^2$.

- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث تكون A ، M و M' على استقامة واحدة

التمرين (09) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L = (z-2i)(\bar{z}-1)$

عين مجموعة النقط M حتى يكون : (أ) L حقيقي

(ب) L تخيلي صرف

التمرين (10) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L = (1-z).(1-iz)$ عيّن مجموعة النقط M حتى يكون : (أ) L حقيقي ، (ب) L تخيلي صرف

التمرين (11) حل في \mathbb{C}^2 الجمل ذات المجهول $(z; z')$ التالية :

$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3\bar{z} + i\bar{z}' = 1 \end{cases} /2 \quad , \quad \begin{cases} iz_1 + (2+i)z_2 = 4+i \\ z_1 - (3-2i)z_2 = -3+8i \end{cases} /1$$

الجزء الثاني: العمليات على الشكل المثلثي و الأسي

التمرين (12) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

$$z_5 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2} \quad , \quad z_4 = 1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_3 = -\sqrt{3} - i \quad , \quad z_2 = 3 - 3i \quad , \quad z_1 = 1 + i$$
$$z_{10} = \frac{2}{1+i\sqrt{3}} \quad , \quad z_9 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \quad , \quad z_8 = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}} \quad , \quad z_7 = -2+2i \quad , \quad z_6 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}$$

التمرين (13) ليكن العدد المركب $Z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$: حيث

(1) احسب طولية العدد المركب Z و عمدة له .

(2) اكتب Z على الشكل الجبري .

(3) استنتج $\sin \frac{5\pi}{12}$ و $\cos \frac{5\pi}{12}$

(4) بيّن ان $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}$ عدد حقيقي

التمرين (14) z ، v و u أعداد مركبة حيث:

$$z = (3+\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3}) \quad , \quad u = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad v = \frac{z}{u}$$

(1) اكتب v على الشكل الجبري .

(2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z .

(3) استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$.

(4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

التمرين (15) في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z

أ - $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)$ ب - $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

ج - $z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6}\right)$ د - $z = \sin\frac{\pi}{6} - i \cos\frac{\pi}{6}$

التمرين (16) I) z_1 و z_2 عدنان مركبان حيث : $|z_1| = |z_2| = 1$

- برهن ان العدد $\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1 \cdot z_2}\right)$ حقيقي

II) z_1 و z_2 عدنان مركبان مختلفان لهما نفس الطويلة .

- أثبت أن العدد المركب $\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$ تخيليا صرف

التمرين (17) A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب

$z_1 = 1$ ، $z_2 = 2i$ و $z_3 = -1 - i$

(1) أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_3 - z_1|$

(2) أحسب $\text{Arg}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$. (3) استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين (18) 1/ أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} ؛ \frac{1}{2}e^{i\pi} ؛ \sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}} ؛ 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

2/ أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$$z_4 = -1 ؛ z_3 = \frac{5}{4}i ؛ z_2 = 3\sqrt{3} - 3i ؛ z_1 = 2 - 2i$$

3/ أعط شكلا أسّيًا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$$z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i \sin\frac{\pi}{7}\right) ؛ z_3 = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}} ؛ z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} ؛ z_1 = (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

التمرين (19) المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدة الرسم 4cm) .

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $a = 1$ ، $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

$$c = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ و } d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

(1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

(2) مثل النقط A ، B ، C و D في المعلم ثم برهن أن الرباعي OACB هو معين .

التمرين (20) احسب :

$$z_3 = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2(1-i)} \right)^{1990}, \quad z_2 = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}, \quad z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$$

التمرين (21) عيّن الطويلة وعمدة لكل عدد مركب مما يلي :

$$(1) \quad z_1 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{و} \quad \alpha \in [0; 2\pi[\quad \text{و} \quad z_2 = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{و} \quad \alpha \in [0; 2\pi[$$

$$(3) \quad z_3 = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \quad \text{و} \quad \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{و} \quad z_4 = \frac{1}{1-i \tan \theta} \quad \text{و} \quad \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

التمرين (22) نعتبر العددين المركبين z_1 ، z_2 حيث : $z_1 = -\sqrt{3} + i$ و $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

(1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

$$(2) \quad \text{استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب } L \text{ حيث : } L = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

(3) اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

$$(4) \quad \text{استنتج قيمتي : } \cos \frac{13\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{13\pi}{12}$$

التمرين (23) لتكن A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها على التوالي :

$$a = -1 + i, \quad b = -1 - i, \quad c = 2i, \quad d = 2 - 2i$$

$$(1) \quad \text{احسب الطويلة وعمدة كل من العددين المركبين : } \frac{c-a}{d-a} \text{ و } \frac{c-b}{d-b}$$

(2) استنتج طبيعة كل من المثلثين ACD و BCD

(3) بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

$$(24) \quad (1) \quad \text{برهن أن : } \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin \frac{\pi}{10}}$$

$$(2) \quad \text{أحسب المجموع } 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

$$(3) \quad \text{عين قيمة لكل من المجموعين } S \text{ و } T \text{ حيث } S = \sum_{k=0}^4 \cos \frac{k\pi}{5} \text{ و } T = \sum_{k=0}^4 \sin \frac{k\pi}{5}$$

$$(25) \quad (1) \quad \text{بيّن أن : } e^{i\frac{\pi}{11}} + e^{i\frac{3\pi}{11}} + e^{i\frac{5\pi}{11}} + e^{i\frac{7\pi}{11}} + e^{i\frac{9\pi}{11}} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2 \sin \frac{\pi}{22}}$$

$$(2) \quad \text{استنتج أن : } \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

الجزء الثالث: المعادلات من الدرجة الثانية

التمرين (26): عيّن الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة التالية :

$$1+4\sqrt{5}i , -4 , 2i , -3-4i , -15+8i , 8-6i$$

التمرين (27): حل في المجموعة \mathbb{C} كلا من المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} z^2 - 2(2-i)z + 6 = 0 & /2 , & z^2 + (7-4i)z + 9-15i = 0 & /1 \\ z^2 + (\sqrt{3}-7i)z - 4(3+i\sqrt{3}) = 0 & /4 , & z^2 + 2z + 10 = 0 & /3 \\ iz^2 - 2iz + i + 2 = 0 & /6 , & z^2 + 4 = 0 & /5 \\ z^2 + 8i = 0 & /8 , & \alpha z^2 + (1-i\alpha^2)z - \alpha i = 0 & /7 \\ 2z^2 + 8z \sin \theta + 5 - 3\cos(2\theta) = 0 & /9 \end{aligned}$$

التمرين (28) (1): أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8+6i$:

(2) يعطى كثير الحدود للمتغير المركب z :

$$Q(z) = z^3 + (5i-6)z^2 + (9-24i)z + 18+13i$$

أ- احسب $Q(-i)$

ب- حل عندئذ في \mathbb{C} المعادلة $Q(z) = 0$

(3) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

لتكن A, B, C صور حلول المعادلة $Q(z) = 0$. ما نوع المثلث ABC

التمرين (29) (1): اكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $(-1-i)$.

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$\frac{(1-3i)z + 3+i}{z-i} = z$$

(3) نرمز بالرمز z_0 لحل المعادلة السابقة الذي له أصغر طولية .

أ - أحسب العدد المركب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{1984}$ وأكتبه على الشكل الجبري .

ب - ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا ؟

التدريب على حل تمارين بكالوريات

التمرين (01) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

. عدد مركب حيث $z = x + iy$ و $z \neq 2i$ ، x ، y عدنان حقيقيان .

$$L = \frac{z + 8 + 4i}{z - 2i} \text{ . حيث } L \text{ نعتبر العدد المركب}$$

(1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

(2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

(3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا .

(4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (02) ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعروف كما يلي :

$$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$$

(1) تحقق من أن $P(2+i) = 0$ ؛ جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغير المركب z حتى يكون من أجل كل

$$P(z) = (z - 2 - i) \cdot Q(z) \text{ . عدد مركب } z$$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z . $P(z) = 0$.

(3) لتكن A ، B و C صور حلول المعادلة $P(z) = 0$ في المستوي المركب حيث A صورة

الحل $(2+i)$.

- جد إحداثيات النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD .

التمرين (03) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية :

$$z^3 - (6+i)z^2 + (13+i)z - 10 + 2i = 0$$

(1) أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

(2) حل في المجموعة \mathbb{C} ، المعادلة (E) . نسمي z_1 الحل الذي جزئه التخيلي سالب و z_2 الحل

الثالث .

(3) في المستوي المركب لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2 .

- جد إحداثيات النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات: -2 ، 3 و 1 على الترتيب .

- عين المجموعة E_M للنقط M من المستوي حيث :

$$-2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 9$$

التمرين (04) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف كما يلي :

$$P(z) = z^3 - (3+i)z^2 + (4+i)z + 2i - 4$$

(1) أحسب $P(2)$ ، جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغير المركب z بحيث يكون من أجل كل

$$عدد مركب z : $P(z) = (z-2) \cdot Q(z)$$$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z : $P(z) = 0$.

(3) في المستوي المركب لتكن A ، B و C صور حلول المعادلة $P(z) = 0$.

- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

التمرين (05) (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، كلا من المعادلتين :

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad ; \quad z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

(2) في المستوي المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة

$$1+2i \quad , \quad 1+\sqrt{3}+i \quad , \quad 1-2i \quad \text{و} \quad 1+\sqrt{3}-i \quad \text{على الترتيب .}$$

أ - ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب - أكتب معادلة للدائرة C المحيطة بالمثلث ABC .

ج - أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة C .

د - أنشئ C والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .

التمرين (06) من أجل كل عدد مركب $z \neq 2i$ نعتبر العدد المركب $L(z)$ بحيث :

$$L(z) = \frac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz + 2}$$

(1) جد الأعداد المركبة z بحيث : $L(z) = z$. ثم أكتب هذه الأعداد على الشكل المثلثي .

(2) في المستوي المركب لتكن النقطة M التي إحداثياتها $(x; y)$ ولاحقتها z .

- أكتب على الشكل الجبري العدد $L(z)$.

- عين مجموعة النقط M التي للاحقتها z بحيث يكون $L(z)$ عددا تخيليا صرفا

التمرين (07) (1) عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي .

α عدد مركب طويلته r وعمدته θ .

أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - \alpha z + \alpha^2 = 0 \quad (\text{نرمز لحلي هذه المعادلة بـ } z_1 \text{ و } z_2)$$

ب- عبر بدلالة r و θ على طويلتي z_1 و z_2 وعمدتيهما

$$L = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i \quad \text{حيث : } L \text{ المركب}$$

أ- احسب L^2 و اكتبه على شكله المثلثي . ب- استنتج الطويلة وعمدة للعدد L

ج- استنتج قيمتي : $\cos \frac{19\pi}{12}$ و $\sin \frac{19\pi}{12}$

التمرين (08) 1- أ- احسب $(\sqrt{3} + 3i)^2$ ، ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة:

$$2z^2 + (3\sqrt{3} + i)z + 4 = 0$$

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة المعطاة حيث: $|z_1| < |z_2|$

ب- اكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله الأسّي .

2- في المستوي المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر العدد المركب $L = -2(\sin \theta + i \cos \theta)$

حيث θ عدد حقيقي ، ولتكن النقط A ، B و M صور الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، L على الترتيب . أ- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L بدلالة θ

ب- نضع: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ - اثبت أن المثلث ABM قائم .

التمرين (09) 1 حل في \mathbb{C}^2 الجملة التالية :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 6 - 4i \\ z_1 \times z_2 = 13 - 18i \\ |z_1| < |z_2| \end{cases}$$

2) في المستوي المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A ، B و C صور الأعداد المركبة: $-i$ ، z_1 ، z_2 على الترتيب . ما نوع المثلث ABC

3) عيّن معادلة الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC .

4) عيّن معادلة المماس (Δ) للدائرة (Γ) في النقطة C .

التمرين (10) نعتبر في \mathbb{C} المعادلة: $z^3 - (1+i\sqrt{2})z^2 + (1+i\sqrt{2})z - i\sqrt{2} = 0$

1- أ) بيّن ان هذه المعادلة تقبل حلا تخيليا z_0 يطلب تعيينه

ب) احسب الحلين الآخرين z_1 و z_2 حيث: z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب .

2- في المستوي المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$. لتكن A ، B و C صور الأعداد المركبة:

z_0 ، z_1 ، z_2 على الترتيب .

أ) عين لاحقة النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات (-3) ، $(1+\sqrt{6})$

و $(1-\sqrt{6})$ على الترتيب .

ب) بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين (11) 1/ عين الطويلة وعمدة للعدد المركب: $-8 + 8\sqrt{3}i$

2/ عين كل الأعداد المركبة L بحيث: $L^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

3/ حل عندئذ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة:

$$(z + i)^4 - 8(-1 + i\sqrt{3}) = 0$$

التمرين (12) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^2 - [\sqrt{3} + 1 + 2i]z + (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

(1) أ) احسب $(\sqrt{3} - 1)^2$ ثم حل في \mathbb{C} المعادلة (1)

نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة بحيث : $|z_1| > |z_2|$

(ب) اكتب كلا من العددين z_1 و z_2 على الشكل المثلي ثم استنتج الطويلة وعمدة للعدد

المركب $z_1 \times z_2$.

(2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_1 \times z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا.

(3) نضع : $a = \frac{z_1}{2}$ و $b = \frac{z_2}{\sqrt{2}}$ و $L = \frac{a+b}{1+ab}$

أ) تحقق ان $|a| = |b| = 1$.

(ب) احسب مرافق L بدلالة a و b واستنتج أن L حقيقي .

التمرين (13) نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعروف بـ :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$

1. أ - احسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$

ب - برهن أنه توجد أعداد حقيقية a, b, c بحيث من أجل كل عدد مركب z

$$P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$$

2. حل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z ، $P(z) = 0$.

. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

أ - مثلّ النقط A, B, C, D ذات اللواحق على الترتيب $z_A = i\sqrt{3}$ ، $z_B = -i\sqrt{3}$

$$z_D = \overline{z_C} \text{ و } z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$$

ب - أثبت أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة.

4. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O .

بيّن أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم عيّن طبيعة المثلث BEC .

التمرين (14) α عدد مركب غير معدوم . 1. أنشر العبارة $[1 - i(1 + \alpha)]^2$.

2. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة التالية ذات المجهول z :

$$z^2 + [-1 + i(1 - \alpha)]z + i\alpha + \alpha = 0$$

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي هذه المعادلة حيث z_2 هو الحل المستقل عن α

3. نفرض في هذا السؤال أن $\alpha = iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم .

أكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله المثلثي .

4. المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A و M نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_2 و z على الترتيب ، ولتكن E_p مجموعة النقط M من

$$\cdot (z - z_2)(\overline{z - z_2}) = 2$$

تحقق أن مبدأ المعلم O ينتمي إلى E_p ثم عيّن E_p

التمرين (15) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^3 + 2(-\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i = 0 \dots\dots (1)$$

1. بيّن أن المعادلة (1) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

2. حل عندئذ المعادلة (1). نسمي z_1 و z_2 الحلين الآخرين حيث الجزء التخيلي للعدد z_1 سالب

1. نضع : $\omega = \frac{z_1}{z_2}$ (أ). عيّن الشكل المثلثي للعدد ω .

(ب) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. بكل عدد مركب

z غير معدوم نرفق النقط M ، M_1 ، M_2 التي لواحقها على الترتيب : z ، ωz ، $\omega^2 z$.
- برهن أن الرباعي OMM_1M_2 معين .

التمرين (16) 1/ حل في \mathbb{C} المعادلة التالية :

$$z^2 - (1+i)z - 4i = 0$$

$$2/ نعتبر المعادلة : $z^4 - (1+i)z^3 + (9-4i)z^2 - 9(1+i)z - 36i = 0$$$

(أ) بيّن ان لهذه المعادلة حلين تخيليين صرفيين متعاكسين z_3 ، z_4 ، يطلب تعيينهما .

(ب) استنتج مجموعة حلول هذه المعادلة .

3/ المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. M نقطة من المستوي لاحقتها z

$$- \text{ اوجد مجموعة النقط } M \text{ من المستوي بحيث يكون : } \arg\left(\frac{z - z_3 - z_4}{z - z_1 - z_2}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

التمرين (17) $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ عدد مركب حيث :

(1) احسب α^2 و α^4 ثم اكتب α^4 على شكله المثلثي .

(2) استنتج الطويلة وعمدة للعدد α . ثم احسب كلا من العددين : $\cos \frac{13\pi}{8}$ و $\sin \frac{13\pi}{8}$

(3) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. M نقطة لاحقتها z عين مجموعة

$$\text{النقط } M \text{ بحيث : } |\alpha z| = 8$$

التمرين (18) 1/ حل في \mathbb{C} المعادلة : (1)..... $(iz - 1)[z^2 - (1+4i)z - (5+i)] = 0$

نرمز بـ z_0 ، z_1 و z_2 إلى حلول المعادلة (1) حيث : $|z_0| < |z_1| < |z_2|$

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب .

2/ أ) أوجد احداثيي النقطة G مرجح الجملة : $\{(A;1), (B;2), (C;1)\}$

ب) عيّن مجموعة النقط M ذات اللواحق z بحيث :

$$|z - z_0|^2 + 2|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 34$$

التمرين (19) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث أن :

$$f(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$$

(1) أثبت أن $f(z)$ يقبل جذرين مترافقين يطلب تعيينهما.

(2) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $f(z) = 0$.

نسمي A ، B ، C صور الأعداد : $-7+5i$ ، $-7-5i$ ، $i\sqrt{2}$ و على الترتيب .

(3) لتكن D النقطة التي لاحقتها $1+i$. عين لاحقة النقطة E حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع .

(4) لتكن F النقطة التي لاحقتها $1+11i$. نضع $\omega = \frac{(z_A - z_D)}{(z_F - z_B)}$.

أ) أكتب ω على الشكل الجبري .

ب) أكتب ω على الشكل الأسّي .

(5) أثبت أن المستقيمين (AD) و (BF) متعامدان.

- استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$.

التمرين (20) 1/ احسب الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $-2 - 2\sqrt{3}i$

2/ حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة التالية :

$$z^2 - 2z + 3 + 2\sqrt{3}i = 0$$

(نسمي حلي هذه المعادلة z_0 و z_1 حيث : $|z_0| < |z_1|$)

3/ φ عدد حقيقي ، z عدد مركب حيث : $z = 1 + 2\cos\varphi + 2i\sin\varphi$

M_0 ، M_1 ، M نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لواحقها

على الترتيب z_0 ، z_1 ، z .

أ) ما هي قيم φ حتى تكون M عنصرا من $\{M_0, M_1\}$

ب) إذا كانت M تختلف عن M_0 و M_1 برهن أن المثلث M_0MM_1 قائم في M

ج) عين قيم φ حتى يكون $M_0M = \frac{1}{2}M_0M_1$. أنشئ M عندئذ .

التمرين (21) : نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 + 2z + 1 + i = 0$

نرمز بـ z_1 و z_2 للحلين بحيث: $\text{Im}(z_1) > 0$

/1 حدد z_1 و z_2

/2 المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A و B و M_1 و M_2 التي

لواحقها على التوالي: -1 و $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ و z_1 و z_2 .

(أ) اكتب العدد المركب $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ على الشكل المثلثي.

(ب) تحقق من أن: $\overline{AM_1} = \overline{OB}$ وان A منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثم انشئ النقط: A و B و M_1 و M_2 .

(ج) استنتج أن $AOBM_1$ معين ثم أن $\arg(z_1) \equiv \frac{7\pi}{8} [2\pi]$.

التمرين (22) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

. عدد مركب $z = x + iy$ و x ، y عدنان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث $f(z) = \frac{2z - i}{z + 1 - i}$.

(1) اكتب العدد المركب $f(z)$ على الشكل الجبري .

(2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $f(z)$ حقيقيا .

(3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $f(z)$ تخيليا صرفا.

(4) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $|f(z)| = \sqrt{3}$

(5) حل في \mathbb{C} المعادلة: $f(z) = z$

يقول الشاعر أبو القاسم الشابي:

لبست المنى وخلعت الحذر

إذا ما طمحت إلى غاية

ولا كبة اللهب المستعر

ولم أتخوف و عور الشعاب

يعش ابد الدهر بين الحفر

ومن لا يجب صعود الجبال

الهدية

الصبر هو زاد العظماء والجد والكفاح شعارهم وأترككم لبيت يوجهه
الشافعي لمن يعيش يحلم دون أن يعمل لما يحلم به شيئا:

و أبيت سهران الدجى وتبته نوما وتبغي بعد ذاك لحاقي

وقد قالوا: إن العلم عزيز؛ إذا أعطيته كلك أعطاك بعضه. أقول فكيف إذا أعطيته بعضك، بل

توافه وقتك، فما عساک أن تنال منه .

POINT DE VUE HISTORIQUE

***Il n'existe pas de réel dont le carré soit strictement négatif.** Pourtant dès le 16ème siècle les algébristes italiens dont le plus célèbre d'entre-eux Jérôme Cardan n'hésitent pas à utiliser le symbole $\sqrt{-a}$ lorsque a est un nombre réel strictement positif pour représenter le résultat de l'extraction impossible de la racine carrée du nombre négatif -a. Ils décrivent en détail les règles de calcul permettant de manipuler ces nouveaux nombres appelés par eux "**NOMBRES**

IMPOSSIBLES". En 1572 Bombelli montre à l'aide de la formule de Cardan que la racine $x=4$ de l'équation $x^3-15x-4=0$ peut s'écrire

$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=4$. A l'origine il s'agissait seulement de donner des racines à toutes les équations du second degré. Les résultats obtenus dans l'étude des équations du 3ème degré allaient familiariser les mathématiciens avec ces symboles et mettre en évidence leur rôle comme intermédiaire commode de calcul dans de nombreux cas. Pour ces raisons sommes toutes empiriques, les mathématiciens utilisaient avec une confiance croissante les nombres IMAGINAIRES depuis le début du 17ème siècle. Dès 1629 A.Girard soupçonnait que toute équation de degré n à n racines réelles ou complexes. Ce sont les mathématiciens du 19ème siècle qui ont construit les nombres complexes à partir des quantités connues et qui leur ont donné une "réalité mathématique".

***Extrait de l'encyclopédie Universalis.**