سلسلة استعد للبكالوريا خاصة بشعبتي الرياضيات وتقني رياضي

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2011/2010

الشعبـــــة : رياضيات و تقني رياضي

إعداد الأستاذ/ خليلات عمار

{المحور: الحســـــــــــاب}

خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ - القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين – خواصه و حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر

التمرين (01) : 1) عين القاسم المشترك الأكبر d للعددين: 1440 و 276

2) استنتج مجموعة القواسم المشتركة للعددين: 1440 و 276

3) انطلاقا من سلسلة القسمات المنجزة في خوارزمية إقليدس ، اوجد عددين صحيحين u و v بحيث : $1440u + 276v = d$

التمرين (02) : n عدد مكون من أربعة أرقام . باقي قسمة العدد 21685 على n هو 37 و باقي قسمة العدد 33509 على n . عين العدد n .

التمرين (03) في كل حالة من الحالات التالية ، عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين :

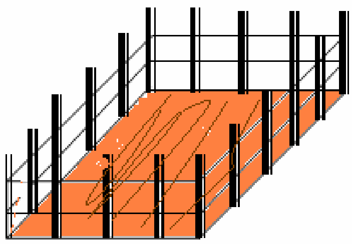
1) $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=9 \end{cases}$ ، 2) $\begin{cases} a^2-b^2=600 \\ PGCD(a,b)=5 \end{cases}$ ، 3) $\begin{cases} 2a^2+b^2=2112 \\ PGCD(a,b)=8 \end{cases}$

التمرين (04) بعدا قطعة أرضية مستطيلة الشكل هما $156m$ و $90m$.

يراد إحاطتها بسياج قائم بأوتاد (أعمدة) حديدية مغروسة في الأرض بنفس المسافة مثنى ، مثنى ؛ وفي كل زاوية القطعة يغرس وتد.

علما أن المسافة بين كل وتدين متتاليين ، هي عدد طبيعي مقدر بالمتر ، أقل من $5m$ و أكبر من $2m$.

ـــ أحسب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط القطعة الأرضية



التمرين (05) n عدد طبيعي . نضع $a=n\left(n^2+5\right)$.

1) برهن أن a عدد زوجي .2) برهن أن a مضاعف للعدد 3 .

التمرين (06) 1- عين كل الأعداد الطبيعية الذي يكون من أجلها الباقي والحاصل لقسمتها على 7، متساويين.

2- a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث : $a+b=416$ وباقي القسمة الأقليدية لِـ a على b هو 61 . عين a و b .

التمرين (07) n عدد طبيعي . 1) نضع : $a=n^2+n$ و $b=n+2$.

أ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(a;b)=PGCD(n;b)$.

ب ـ استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(a;b)$.

2) نعتبر العددين a و b حيث : $a=3n^3+5n^2+2n$ و $b=3n^2+8n+4$

أ ـ برهن أن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

ب ـ استنتج ، حسب قيم n ، أن $PGCD(a;b)$ هو $(3n+2)$ أو $2(3n+2)$.

جـ ـ عين a و b علما أن $PGCD(a;b)=41$

التمرين (08) في المستوي المنسوب إلى معلم ، نعتبر C_f منحني الدالة f المعرفة على المجموعة $D=[-3;1[\cup]1;3]$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-3}{x-1}$

1) عين العدد الحقيقي a حتى يكون من أجل كل $x\in D$، $f(x)=2x-1+\dfrac{a}{x-1}$

2) عين نقط المنحني C_f التي إحداثيتيها أعداد صحيحة

التمرين (09)الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين m و n على 17 هما على التوالي 8 و 12.

عين بواقي القسمة الأقليدية لكل من الأعداد $m+n$ ، $m\times n$ و m^2 على 17 .

التمرين (10)نعتبر عددين طبيعيين غير معدومين x و y وأوّليين فيما بينهما . نضع $S=x+y$ و $P=xy$.

1) أ ـ برهن أن x و S أوّليان فيما بينهما . وكذلك y و S أوّليان فيما بينهما .

ب ـ باستعمال البرهان بالخلف ، برهن أنّ S و P أوّليان فيما بينهما .

جـ ـ برهن أنّ العددين S و P من شفعيتين مختلفتين (أحدهما فردي والآخر زوجي).

2) عين القواسم الموجبة للعدد 84 .

3) عين الأعداد الأوّلية فيما بينها x و y حث $SP=84$

4) عين عددين طبيعيين a و b يحقّقان الشرطين التاليين: $\begin{cases}a+b=84\\ab=d^3\end{cases}$ مع $d=p\gcd(a,b)$.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (11) a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

نضع : $x = 2a + b$ و $y = 5a + 2b$

1/ أثبت أن : $PGCD(a,b) = PGCD(x,y)$

2/ عين الثنائيات من الأعداد الطبيعية (α,β) حيث : $\begin{cases}(2\alpha+\beta)(5\alpha+2\beta)=1620\\ PGCD(\alpha,\beta)=3\end{cases}$

التمرين (12) 1- xعدد طبيعي . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k ،

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = x^k - 1$$

2- أ- d و n عددان طبيعيان غير معدومين حيث d يقسم n .

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ، العدد $a^d - 1$ يقسم العدد $a^n - 1$.

ب- استنتج أن العدد $2^{2010} - 1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9

3- أ- عيّن $PGCD(63;60)$

ب- بيّن أن : $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3 = a^3 - 1$

ج- برهن أن : $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1) = a^3 - 1$

د- استنتج القيمة لـــ : $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$

التمرين (13) 1. أ) n عدد طبيعي ، انشر العبارة $(n+3)(3n^2-9n+16)$

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3 - 11n + 48$ قابلا القسمة على $n+3$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. بيّن أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c تكون المساواة التالية صحيحة:

$$PGCD(a;b) = PGCD(bc-a;b)$$

3.بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2.، تكون المساواة التالية صحيحة :

$$PGCD(3n^3-11n;n+3) = PGCD(48;n+3)$$

4.أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48

ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا

التمرين (14) 1) n عدد صحيح يختلف عن 1 . نضع : $a = 3n+5$ و $b = n-1$.

أ ـــ تحقق أن $a = 3b + 8$.

ب ـــ جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\dfrac{a}{b}$ عددا صحيحا .

2) نفرض أن n عدد طبيعي . أ ـــ برهن أن $PGCD(a;b)$ هو قاسم للعدد 8 .

ب ـــ ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لِــ $PGCD(a;b)$.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

الموافقات في ¢ - تطبيقات الموافقات

التمرين (15)عين باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل القيم من 0 إلى 4 للعدد الطبيعي k.

1. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل كل عدد طبيعي k.

2. استنتج باقي قسمة 17^{4k} على 5.

3. بين أن العدد $2^{4k+3}+17^{4k+2}+3$ يقبل القسمة على 5.

4. استنتج باقي قسمة $2007^{1999}-61^{2008}+87^{49}$ على 5.

التمرين (16) n عدد طبيعي. 1) عين باقي قسمة العدد 6^{2n} على 7

2) ادرس تبعا لقيم n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

3) ليكن العدد الطبيعي A_n حيث : $A_n=3+6^{2n}+5^n$

- عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها A_n قابلا القسمة على 7 .

التمرين (17) 1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 9

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد: 7^n+3n-1 قابلا القسمة على 9

التمرين (18) باستعمال خواص الموافقات في ¢ برهن أن :

/1 من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{2n+2}-2^{n+1}$ يقبل القسمة على 7.

/2 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد $2^{2n-1}\times3^{n+2}+1$ يقبل القسمة على 11

/3 من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n\left(n^2-1\right)$

التمرين (19) أ ــ عين حسب قيم العدد الطبيعي x ، القيم التي توافق x^2 بترديد 5 .

ب ــ استنتج أن المعادلة $x^2-5y^2=3$ ذات المجهولين x و y ، لا تقبل حلا في ¥ .

التمرين (20) 1) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل واحدة من القيم 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 للعدد الطبيعي n .

2) استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

3) عين باقي القسمة الأقليدية على 7 للعدد $\left(3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\right)$.

التمرين (21) عين كل الأعداد الطبيعية n بحيث يقبل العدد: $2n^3-n+2$ القسمة على 7

التمرين (22) 1)عين حسب قيم العدد الطبيعي n رقم احاد العدد 2^n و رقم احاد العدد 7^n

2) استنتج رقم احاد العدد $3548^9\times2537^{31}$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (23) ***في عملية تشفير نستعمل الحروف المرقمة كما يلي:***

ض	ص	ش	س	ز	ر	ذ	د	خ	ح	ج	ث	ت	ب	أ	
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	X
															y
															التشفير

ي	و	هـ	ن	م	ل	ك	ق	ف	غ	ع	ظ	ط	
27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	X
													y
													التشفير

نقوم بعملية التشفير و ذلك باستعمال التحويل $x \to y$ حيث: $y \equiv 5x+7[28]$

- أكمل الجدول السابق
- شفر الجملة " ثانوية الأمير عبد القادر"
- فك تشفير الجملة " ش،د،ح،ع،هـ،غ،ت،م ،هـ،د،ح،ط،ي،د،ج"

التمرين (24) 1/ عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 5^n على 13

2/ اوجد باقي قسمة العدد $(2007)^{2009}$ على 13

3/ أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $18^{4n}+31^{4n+1}+57^{4n+3}-1\equiv 0[13]$

4/ عين n بحيث : $\begin{cases} 10\le n\le 40 \\ 18^{4n}+31^{4n+1}+2n\equiv 0[13] \end{cases}$

التمرين (25) 1) اوجد قيم العدد الصحيح n التي تحقق : $n^2+3n-6\equiv 0[11]$

2) اثبت انه من اجل كل عدد صحيح n يكون العدد n^2+3n-6 غير قابل القسمة على 121

التمرين (26) n عدد طبيعي . 1) عيّن باقي قسمة 4^{2n} على 5

2)ادرس بواقي قسمة 3^n على 5

3) ما هو باقي قسمة العدد 1429^{2009} على 5؟

4) ليكن العدد الطبيعي $A_n=2+4^{2n}+3^n$.عيّن قيم n بحيث A_n يقبل القسمة على 5.

التمرين (27) عين كل الأعداد الطبيعية n بحيث : $5^{4n}+5^{3n}+5^{2n}+5^n\equiv 0[13]$

التمرين (28) 1) أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10

ب- استنتج رقم أحاد العدد $63\times 9^{2001}-7^{1422}$

2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv (n-1).3^{2n+1}[10]$

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv 0[10]$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (29) 1- عين في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية الأعداد x بحيث : $3x-5\equiv 0[11]$

2- نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول (x,y) من $\mathbb{Z}^2$: $3x-11y=5.......(1)$

- باستعمال نتيجة السؤال الأول اوجد الثنائيات (x,y) الصحيحة حلول المعادلة (1)

3- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y

- ما هي القيم الممكنة للعدد d إذا كان الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1)

4- عين الثنائيات (x,y) الطبيعية حلول المعادلة (1) بحيث يكون $d=5$

التمرين (30) 1/ أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10

ب- استنتج رقم أحاد العدد $(1994)^{1414}$

2/ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بحدها العام : $u_n=2^n$. أ) تحقق من أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية

نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n=(5+2^1)+(5+2^2)+.......+(5+2^n)$

ب- اوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10

التمرين (31) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: (1) ... $5x-8y=3$.

- تأكد أن $(7;4)$ حل للمعادلة .
- أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $5x\equiv 3[8]$.
- عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x\equiv 3[8]$.
- أثبت أن كل حلول المعادلة (1) هي من الشكل $(8k+7;5k+4)$ حيث k عدد صحيح

التمرين (32) 1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 10 .

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $(7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3})$ يقبل القسمة على 10 .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع :

$$S_n=1+7+7^2+...+7^n$$

ـــ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4}\equiv S_n[10]$.

ـــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي السمة الأقليدية للعدد S_n على 10 .

التمرين (33) نضع $N=\{0,1,2,...,27\}$ ونستعمل الحروف المرقمة كما يلي:

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x \mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x+3$ على 28 .

1) شفر الكلمة " **الجزائر**"

2) بين أنه من أجل كل y من المجموعة N يوجد x وحيد في المجموعة N حيث يكون y هو باقي قسمة $x+3$ على 28.

3) حل تشفير كل من الكلمات التالية :**تبضل ؛ لثغوا ثهصاشثث ؛ وذوز** .

التعـــــــــــــــــدد

التمرين (34) يكتب العدد الطبيعي n في التعداد الثنائي $\overline{1101101}$.
ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كما يلي : $\overline{214}$ ؟

التمرين (35) 1/ ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه
$\overline{2003}=\overline{21}\times\overline{43}$ ؟
2/ أوجد في كل حالة أساس التعداد الذي يكون فيه : أ) $\overline{411}=\overline{15}\times\overline{23}$ ؛
ب) $\overline{324}=\overline{21}\times\overline{14}$ ؛ جـ) $\overline{2888}=\overline{412}\times\overline{31}$.

التمرين (36) 1/ أنجز جدولي الجمع و الضرب في النظام ذي الأساس 5
2/ أنجز في النظام ذي الأساس 5 العمليات التالية :

$$\begin{array}{r}\overline{213}\\ \times\ \overline{14}\\ \hline =\end{array}\quad ، \quad \begin{array}{r}\overline{3421}\\ +\ \overline{230}\\ \hline =\end{array}\quad ، \quad \begin{array}{r}\overline{431}\\ -\ \overline{132}\\ \hline =\end{array}\quad ، \quad \begin{array}{r}\overline{342}\\ \times\ \overline{23}\\ \hline =\end{array}$$

التمرين (37) في أي أساس تعداد يكون $\overline{51}=\overline{13}+\overline{35}$ ؟
ـــ أكتب المساواة السابقة في النظام الثنائي

التمرين (38) أنجز ، في النظام ذي الأساس 12 ، العمليات التالية .

$$\begin{array}{r}39b7\\ +\ 213\\ \hline\end{array}\quad ، \quad \begin{array}{r}400a\\ -39b7\\ \hline\end{array}\quad ، \quad \begin{array}{r}27\\ \times\ 41\\ \hline\end{array}\ .$$

التمرين (39) (أسئلة مستقـــــلة)
1/ يكتب العدد n في النظام العشري 72881 . أكتب العدد n في النظام ذي الأساس 12 ثم في النظام ذي الأساس 7 .
2/ أكتب في النظام العشري العدد $\overline{3752}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 8 .
3/ أكتب في النظام ذي الأساس 12 العدد $\overline{6175}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 9 .
4/ أكتب في النظام ذي الأساس 7 العددين $\overline{234}$ و $\overline{1040}$ المكتوبين في النظام ذي الأساس 5

التمرين (40) N عدد طبيعي يكتب $\overline{xyzx}$ في النظام ذي الأساس 11 ،
و $\overline{yyxz}$ في النظام ذي الأساس 7 .
- أكتب العدد N في النظام العشري .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (41) a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1 \le a \le b \le c$.
عيّن a ، b و c والجداء abc علما أنّ في النظام ذي الأساس a يكون
$b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{555}$.

التمرين (42) 1) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة
$45x-28y=130$ فإن x يكون زوجي و y يكون مضاعف للعدد 5 .
2) عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{2aa3}$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $\overline{5bb6}$
في النظام ذي الأساس 7.

التمرين (43) في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي : $n=\overline{1271x}$.
1) عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8 .
2) عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11

التمرين (44) x عدد طبيعي .برهن أن $3x \equiv 0[7]$ تكافئ $x \equiv 0[7]$
2) ليكن N و N' عددين طبيعيين مكتوبين في النظام العشري كما يلي :
$N=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ ، $N'=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}$.
برهن أن N يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان $N'-2a_0$ يقبل القسمة على 7 .
3) استعمل هذه الطريقة عدّة مرات لتبرير بدون حاسبة إن كان العددان 105154 و 263572 يقبلان القسمة على 7

التمرين (45) x و y عددان طبيعيان غير معدومين .
أوجد الأعداد الطبيعية التي تكتب $\overline{yx}$ في النظام العشري و $\overline{xy}$ في النظام ذي الأساس 7

التمرين (46) عيّن الأعداد الطبيعية المؤلفة من ثلاثة أرقام و التي تكتب $\overline{xyz}$ في النظام ذي الأساس 7 و تكتب $\overline{zyx}$ في النظام ذي الأساس 11

التمرين (47) n عدد طبيعي غير معدوم .نضع $a=n^2+1$
1) أكتب في النظام ذي الأساس a كلا من الأعداد التالية :
n^2+2 ، n^2+2n ، n^4
2) نضع : $x=n\left(n^2+2\right)$ و $y=n^2\left(n^2+2\right)$
- اكتب في النظام السابق كلا من الأعداد التالية : x ، y ، x^2 ، y^2
3) أثبت أن x^2 و y^2 يتألفان من نفس الأرقام و بترتيب معاكس .

التمرين (48) 1) عيّن تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي قسمة 10^n على 7
2) y عدد طبيعي يكتب في النظام العشري $\overline{2xyyx2}$
أوجد الأرقام x و y حتى يكون العدد y قابلا القسمة على 21.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

مبرهنة بيزو ومبرهنة غوص و توظيفهما في المعادلات $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}$

التمرين (49) 1نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول (x,y) من $\mathbb{Z}^2$: $41x-27y=1$

أ) تحقق بواسطة نص مبرهنة من أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا.

ب)جد باستعمال خوارزمية اقليدس حلا خاصا للمعادلة (1)

2 أ).استنتج حلا خاصا للمعادلة : $41x-27y=5.......(2)$

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (2)

التمرين (50) ليكن n عددا صحيحا .

1)أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .

2)أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

3) استنتج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما

التمرين (51) n عدد طبيعي غير معدوم ؛

نضع $a=2n^2+4n+1$ و $b=n+2$.

باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين a و b أوّليان فيما بينهما .

التمرين (52)نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية $2045x-64y=1\ldots(1)$

1) عيّن $PGCD(2045,64)$.

2) استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$. عيّن حلا خاصا للمعادلة (1).

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

التمرين (53) 1. اثبت أن العددين 993 ، 170 أوليان فيما بينهما .

2.نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ذات المجهولين x و y حيث : $993x-170y=143.......(1)$

أ- تأكد أن المعادلة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

ب- اوجد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق : $x_0+y_0=6$

ج- حل عندئذ المعادلة (1)

3.أوجد اصغر عدد طبيعي A بحيث يكون باقي قسمة العدد $(A-1)$ على كل من العددين 1986 و340 هو 14 و 300 على الترتيب .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (54) في المستوي المنسوب إلى معلم ، نعتبر المستقيم Δ ذي المعادلة $21x-31y-2=0$.

أ ــ تحقق أن النقطة $A(6,4)$ تنتمي إلى المستقيم Δ.

ب ــ عين كل نقط المستقيم Δ التي إحداثياتها تكون أعدادا صحيحة

التمرين (55) 1) x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما . أثبت أن العددين $(x+y)$ ، xy أوليان فيما بينهما.

2) α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما . عين α و β حتى يكون : $15\alpha^2-229\beta=30\beta$

3) x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .عين مجموعة الثنائيات (x,y) التي تحقق

$$15(x^2+y^2)=229(x+y)$$

التمرين (56) 1- جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 784 و 1470

2- c عدد صحيح ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ذات المجهولين x و y حيث :

$$784x-1470y=c.......(1)$$

- عيّن الشرط اللازم و الكافي الذي يحققه c حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$

3- نفرض فيما يلي : $c=882$

أ) حل المعادلة (1)

ب) من بين حلول المعادلة (1) جد الحلول (x,y) بحيث يكون العدد y قاسما للعدد x

ج) ما هي حلول المعادلة (1) التي تحقق : $x.y\leq 162$

التمرين (57) المستوي منسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته : $3x+4y-1=0$

1) عيّن مجموعة النقط M من المستقيم (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

2) عيّن مجموعة النقط M من (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة و بحيث يكون مربع المسافة بين O و M مضاعف للعدد 13

التمرين (58) n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع : $a=4n+3$ و $b=5n+2$ ونرمز بــ d للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b أي : $PGCD(a,b)=d$

1- أعط قيم d في الحالات التالية : $n=15, n=11, n=1$

2- احسب $5a-4b$ ثم استنتج القيم الممكنة للعدد d .

3- أ) عين الأعداد الطبيعية n و k بحيث : $4n+3=7k$

ب) عين الأعداد الطبيعية n و k' بحيث : $5n+2=7k'$

4- ليكن r باقي قسمة العدد n على 7.استنتج مما سبق قيم r حتى يكون $d=7$

و ما هي قيم r حتى يكون $d=1$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (59) لتكن S مجموعة الثنائيات (x,y) من الأعداد الصحيحة بحيث :

$$11x+3y=65............(1)$$

1/ اوجد الثنائية (x,y) من S بحيث: $2x_0^2-3y_0=11$

2/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ذات المجهول (x,y)

3/ عيّن كل الثنائيات (x,y) من S بحيث: $(x>-5$ و $y>-5)$

التمرين (60) 1) a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما ، جد a و b حيث :

$b(b^3-1)=28a^2$.

2) a، b ، c ، d و e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها r ، حيث a و r أوليان فيما بينهما ، و $28a^3=e-b$.

أحسب الأساس r ثم الأعداد a، b ، c ، d و e

التمرين (61) 1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x',y'):

$9x'-14y'=13$ علماً أنّ $(3,1)$ حلا لها .

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $45x-28y=130$.

أ) بيّن أنه إذا كان (x,y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5 ؛

ب) حل هذه المعادلة .

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2aa3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5bb6}$ في نظام تعداد أساسه 7 .

عين a و b ثم أكتب N في النظام العشري

التمرين (62) 1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) :

$$5x-4y=11.........(1)$$

2) عين الحلول (x,y) للمعادلة (1) بحيث يكون x و y قابلين القسمة على 11.

3) عين الحلول (x,y) للمعادلة (1) التي تحقق : $(x+8y)^2\le 2500$

التمرين (63) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $324x-245y=7.......(1)$

1) نفرض أن الثنائية (x,y) حل للمعادلة (1) . أثبت أن x مضاعف للعدد 3

2) اوجد حلا خاصا (x_0,y_0) للمعادلة باستعمال خوارزمية اقليدس ثم استنتج حلول المعادلة(1) .

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x,y) حل للمعادلة (1)

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d

ب) عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (1) بحيث يكون x أوليا مع y

---

التمرين (64) 1/ حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $23x-17y=6$

2/ أوجد الأعداد الطبيعية A الأصغر من 1000 بحيث باقي قسمة A على 23 هو 2 و باقي قسمة A على 17 هو 8

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

المضاعف المشترك الأصغر وخواصه والأعداد الأولية وتحليل عدد طبيعي وتوظيفه

التمرين (65) /1 أ- حلل العدد الطبيعي 63 إلى جداء عوامل أولية .

ب- استنتج عدد قواسم العدد 63 وعين مجموعة قواسم العدد 63

/2 عين الثنائيات (a,b) الطبيعية و التي تحقق :

$$\begin{cases} m - 31d = 63 \\ 7 < d < 22 \\ a > b \end{cases}$$

حيث : $m = PPCM\,(a,b)$ و $d = PGCD\,(a,b)$

التمرين (66) عين الثنائيات (a,b) من $\mathbb{N}^2$ و التي تحقق :

$$\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a > b \end{cases}$$

حيث : $m = PPCM\,(a,b)$ و $d = PGCD\,(a,b)$

التمرين (67) n عدد طبيعي غير معدوم .نضع : $a = 2n^2$ و $b = n(2n+1)$

وليكن $d = PGCD\,(a,b)$ و $m = PPCM\,(a,b)$

1- أثبت أن : $b - a = d$

2- استنتج أن : $b^2 - a^2 = m - d^2$

التمرين (68) n عدد طبيعي . باقي قسمته على 15 هو 14 و باقي قسمته على 18 هو 17 و باقي قسمته على 25 هو 24.

- أوجد قيم العدد n المحصورة بين 1000 و 2000

التمرين (69) /1 هل العدد 401 أولي ؟ ثم حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $x^2 - y^2 = 4x + 397$

التمرين (70) – عين عددا طبيعيا A عدد قواسمه 27 إذا علمت أنه يكتب على الشكل :

$A = 9 \times 10^n$ (n عدد طبيعي)

التمرين (71) **(أسئلة مستقلة)** /1 أوجد أصغر عدد طبيعي له 10 قواسم

/2 حلل العدد الطبيعي 15015 ، ما هو عدد قواسم العدد 15015

/3 القول عن عددين أنّهما ودّيان معناه أنّ كل منهما يكون مساويا لمجموع القواسم العدد الآخر باستثناء العدد نفسه .في كل من الحالات التالية أذكر إن كان العددان ودّيين أم لا

أ ــ 220 و 284 . ب ــ $2^5 \times 37$ و $2 \times 5 \times 11^2$.

جـ ــ 18416 و 17296 .

التمرين (72) 1/. اوجد القاسم المشترك الكبر للعددين 1440 و 276

2/ أ) برهن أنه إذا كان العددين α و β أوليان فيما بينهما فإن العددين $\alpha+\beta$ و $\alpha.\beta$ أوليان فيما بينهما .

ب) استنتج أنه من أجل كل ثنائية (a,b) من $\mathbb{N}^2$ يكون : $PGCD(a+b,m)=PGCD(a,b)$ حيث : $m=PPCM(a,b)$

3/ أوجد a و b إذا علمت أن : $0<a<b$ و $a+b=276$ و $m=1440$

التمرين (73) عين في كل حالة من الحالات التالية ، المطلوب تعيين كل الثنائيات (x,y) التي تحقق الجملة المقترحة :

1) $\begin{cases} ppcm(x,y)=60 \\ xy=180 \end{cases}$ مع $x\le y$. 2) $\begin{cases} ppcm(x,y)=12p\gcd(x,y) \\ x+y=105 \end{cases}$ مع $x\le y$

3) $p\gcd(a,b)+ppcm(a,b)=b+9$

4) $\begin{cases} 3ppcm(x,y)=xy \\ x^2-y^2=405 \end{cases}$ ، 5) $\begin{cases} ppcm(x,y)=100 \\ p\gcd(x,y)=5 \end{cases}$

التمرين (74) n عدد طبيعي أكبر من 3 .نضع :

$a=(6n^2-24)(n^2-9)$ ، $b=(3n^2+3n-18)(n^2-n-6)$.

أ ــ برهن أن : $ppcm(a,b)=(n^2-4)(n^2-9)ppcm(6,3)$.

ب ــ عين $ppcm(a,b)$.

التمرين (75) – اوجد أعدادا طبيعية مربع كل منها يقسم العدد 1980

2- عين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق : $m^2-5d^2=1980$

حيث $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

التمرين (76) x و y عددان طبيعيان حيث

$0<x\le y$ ، نضع $p\gcd(x,y)=d$ و $ppcm(x,y)=m$.

نريد تعيين x و y حيث $m^2-5d^2=2000 \ldots (*)$.

أ ــ برهن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $(*)$ فإن d^2 يكون قاسما للعدد 2000 .

ب ــ حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أوّلية . استنتج القواسم المربعة التامة للعدد 2000 .

جـــ ــ برهن أن 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

د ــ استنتج القيم الممكنة للعددين x و y .

التدريب على حل تمارين بكالوريات

التمرين (01) 1.نعتبر المعادلة : $7x+65y=2009....(1)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) بيّن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7

ب) حل المعادلة (1) .

2.ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

3.عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

4.نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$

أ) تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

ب) حل المعادلة : $(7u_1)x+(u_2)y=126567...(2)$ ذات المجهول (x,y) ، حيث x و y عددان صحيحان .

جـ) عيّن الثنائية (x_0,y_0) حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geq 25$.

التمرين (02) 1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13.

2-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كـل من العـددين $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ القسمة على 13.

3-عيّن ، حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 ، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 .

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$

أ – من أجل $p=3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

ب- برهن أنه إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13.

جـ- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n+2$

5- يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي :

$a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$

أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري .

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 .

التمرين (03) 1- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13

2- تحقق أن : $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]$

3- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $10^{2n}+10^n+1\equiv 0[13]$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (04) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $4x-9y=319........(I)$

1)- تأكد أن الثنائية $(82;1)$ حل للمعادلـــــة (I)

- حل المعادلة (I)

2) عين الثنائيات (a,b) الصحيحية ، حلول المعادلة : $4a^2-9b^2=319.......(II)$

3) استنتج الثنائيات $(x_0;y_0)$حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين .

التمرين (05) n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1/ a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$

أ- ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7.

ج- عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p=2n^2-7n-15$ و $q=n^2-7n+10$

أ- بيّن أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب-عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p;q)$

التمرين (06) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x-21y=78$

1) أ- بيّن أن (E)تقبل حلولا في ¢^{2} .

ب-أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y)من ¢^{2} حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5[7]$

- استنتج حلول المعادلة (E) .

2) أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب- عيّن الثنائيات (x,y) من ¥^{2} التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

التمرين (07) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ، 32785 و 2905 .

2) حل في ¢×¢ المعادلة $7x+6y=79$. (لاحظ $72+7=79$) .

3) اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه . إذا علمنا أنّ ثمن بذلة اللاعب هو 2905 دج وثمن بذلة اللاعبة هو 2490 دج وعلمنا أنّ النادي دفع في المجموع 32785 دج .

- ما هو عدد اللاعبين وعدد اللاعبات.

التمرين (08) نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي :

$n=\overline{11a00}$ حيث a عدد طبيعي .

1-عين a حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2-عين العدد a حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

- استنتج قيمة a التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3-نأخذ $a=4$ اكتب العدد n في النظام العشري .

التمرين (09) 1. حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$

2.نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0)=1$ ، عيّن عبارة $f(x)$

3. n عدد طبيعي .

أ) ادرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$

4.أ) احسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n = f(0)+f(1)+......f(n)$

ب)عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n القسمة على 7.

التمرين (10) x عدد طبيعي اكبر من 1 و y عدد طبيعي .

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$

1) أ) انشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم اوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن

$$A=(5x^2+6)(2+2y)$$

ب-احسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي اصغر من 12 ، ثم اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري .

2) أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق :

$$\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$$

التمرين (11) 1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 ، 580

2. α عدد صحيح . نعتبر المعادلة (1)......$1885x-580y=\alpha$

- أوجد الشرط اللازم و الكافي الذي يحققه α حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

3. نفرض فيما يلي أن : $\alpha = 1305$

- حل المعادلة (1)

- أوجد الحلول (x,y) بحيث يكون العدد x قاسما للعدد y.

التمرين (12) 1.أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $18x+4y=84$

ب) ما هي الحلول (x,y) لهذه المعادلة التي تحقق : $x.y > 0$

2. n عدد طبيعي يكتب $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ في النظام ذي الأساس 5، ويكتب $\overline{55\alpha\beta}$ في النظام ذي الأساس 7.

أ - عين الأعداد الطبيعية α ، β ، γ .

ب) اكتب n في النظام العشري .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (13) 1) α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

- عيّن α و β حيث : $\alpha(\alpha^2-19)=35\beta$

2) لتكن (u_n) متتالية هندسية حده الأول u_0 و أساسها r حيث u_0 و r طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0 < r$.

أ) اوجد u_0 و r حتى يكون : $35u_0{}^2+19u_1-u_0r^3=0$

ب) نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$. اوجد الأعداد الطبيعية n حتى يقبل S_n القسمة على 30

التمرين (14) نعتبر المعادلة : (E).......$4862x-1430y=2002$ حيث x و y عددان صحيحان.

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد :4862 ، 1430 ، 2002 .
2. أ- بيّن أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- حل المعادلـــــة (E).

3. a و b عددان طبيعيان حيث (a,b) حل للمعادلة (E) ، d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

أ- عيّن القيم الممكنة لــ d .

ب- عيّن الثنائيات (a,b) عندما $d=7$

التمرين (15) n عدد طبيعي . 1) عيّن باقي قسمة 4^{2n} على 5

2) ادرس بواقي قسمة 3^n على 5

3) ما هو باقي قسمة العدد 1429^{2009} على 5؟

4) ليكن العدد الطبيعي $A_n=2+4^{2n}+3^n$

- عيّن قيم n بحيث A_n يقبل القسمة على 5

التمرين (16) 1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الطبيعيين x و y حيث : $7x-4y=4$

أ-بيّن ان المعادلة (E)تقبل حلولا في $\mathbb{N}^2$.

ب- حل المعادلة (E)

2) a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{75}$ ، $\overline{310}$ في النظام ذي الأساس α و $\overline{49}$ ، $\overline{125}$ في النظام ذي الأساس β.

- عيّن كلا من الأعداد α ، β ، a ، b

التمرين (17) نعتبر المعادلة (1) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : (1)........$5x-6y=3$

1/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حل للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3

- أستنتج حلا خاصا للمعادلة (1) ثم حل المعادلة (1).

2/ استنتج حلول الجملة $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

3/ من بين الثنائيات (x,y)الصحيحة حلول المعادلة (1) ، ما هي الثنائيات التي تحقق: $x^2-y^2 < 56$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (18) 1.نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول (n,m) من $\mathbb{Z}^2$: $11n-24m=1......(1)$

أ) تحقق بواسطة نص مبرهنة أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

ب)–جد باستعمال خوارزمية إقليدس حلا خاصا للمعادلة (1).

ج) – عيّن مجموعة حلول المعادلة (1)

2.**نريد إيجاد** $PGCD\left(10^{11}-1\,,10^{24}-1\right)$.

أ) بيّن أن العدد 9 يقسم كلا من العددين : $1-10^{11}$ و $1-10^{24}$

ب)بيّن أنه إذا كانت الثنائية (n,m) حلا للمعادلة (1) فإن : $9=\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)$

- بيّن أن $\left(10^{11}-1\right)$ يقسم $\left(10^{11n}-1\right)$

- استنتج من السؤال السابق أنه يوجد عددين طبيعيين N و M حيث :

$\left(10^{11n}-1\right)N-\left(10^{24}-1\right)M=9$

د) –بيّن أن كل قاسم مشترك للعددين $\left(10^{24}-1\right)$ و $\left(10^{11}-1\right)$ يقسم 9.

هـ) –استنتج من الأسئلة السابقة $PGCD\left(10^{11}-1,10^{24}-1\right)$

التمرين (19) n عدد طبيعي .ليكن العددان α و β حيث : $\alpha=n^2+1$ و $\beta=n+2$

1- أ) برهن أن : $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,n)$

ب) استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha,\beta)$

2- a و b عددان طبيعيان يكتبان في نظام التعداد ذي الأساس n كما يلي :

$a=\overline{3520}$ و $b=\overline{384}$

أ) برهن أن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

ب) استنتج تبعا لقيم n أن : $PGCD(a,b)$ هو $(3n+2)$ أو $2(3n+2)$

ج) عين α و β إذا علمت أن : $PGCD(a,b)=41$

التمرين (20) n عدد طبيعي أكبر تماما من العدد 2، نعتبر الأعداد الطبيعية :

$a=2n+1$ ، $b=4n+3$ ، $c=2n+3$

1) أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما و استنتج أن الأعداد a ، b ، c أولية فيما بينها.

2) عين تبعا لقيم n قيمة القاسم المشترك

3) عين قيمة n بحيث يكون : $PGCD(b,c)=3$ و $PPCM(b,c)=1305$

4) اكتب b^2 في نظام أساسه a .

5) نفرض أن (a,b,c) هي إحداثيات النقطة ω من الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. - بين أن النقطة ω تنتمي إلى مستقيم $(\mathbf{V})$ يطلب تعيينه.

6) جد معادلة للمستوي (π) الذي يشمل المبدأ O و يحتوي على المستقيم $(\mathbf{V})$.

التمرين (21) 1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

2) استنتج باقي قسمة العدد : $A=(2007)^{2006}+(2006)^{2007}$ على 7.

3) أ-ما هو عدد قواسم العدد 4^n ؟

ب- ليكن S_n مجموع هذه القواسم .أحسب S_n بدلالة n .

جـــ- عيّن العداد الطبيعية n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} S_n \equiv 0[7] \\ 7 \le n < 16 \end{cases}$

التمرين (22) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعتبر العدد الطبيعي $A(n)$ حيث :

$$A(n)=1+6+27+.......+n.3^{n-1}$$

1) أ- برهن بالتراجع أنه لكل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :$4.A(n)=(2n-1)\times 3^n+1$

ب- عين العدد الطبيعي n بحيث : $A(n)=547$

2) أ- برر أن المعادلة $A(5)x-A(4)y=263.....(1)$ تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$

ب- عين الحل العام لها .

ج- عين الثنائيات حلول المعادلة (1) و التي تحقق : $|4x-y-2| < 42$

التمرين (23) 1) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180.

2) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $225x-180y=90$ ... (1)

3) عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x-y+1|<2$

4) a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس a ، و يكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس b . عين a و b ثم a و b .

التمرين (24) 1) حلل العدد 319 إلى جداء عوامل أولية .

2) a و b عددان طبيعيان . أ ــ تحقق من أن : $\begin{cases} a=2(3a+5b)-5(a+2b) \\ b=3(a+2b)-(3a+5b) \end{cases}$.

ب ــ برهن أنه إذا كان a و b أوّليين فيما بينهما فإن $3a+5b$ و $a+2b$ أوليان فيما بينهما .

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=1276 \\ ab=2PPCM(a,b) \end{cases}$.

التمرين (25) 1)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7 .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $(2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1})$ قابلا للقسمة على 7

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$

ــ أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n=u_0+u_1+...+u_n$

ــ ما هي قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 ؟

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (26) 1)بين أنه لكل عدد طبيعي n فإن العددين : $14n+3$ و $5n+1$ أوليان فيما بينهما
2)نعتبر المعادلة (E) : $87x+31y=2$ حيث x و y عددان صحيحان .
ت)تحقق باستعمال السؤال 1) أن العددين 87 و31 أوليان فيما بينهما.
ب) استنتج $(\alpha,\beta)\in \mathbb{Z}^2$ بحيث : $87\alpha+31\beta=1$ ، ثم عين حلا خاصا (x_0,y_0) للمعادلة (E)
جــ) أوجد مجموعة حلول المعادلة (E)
3) نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $87x-31y-2=0$. حدد نقاط المستقيم (Δ) و التي إحداثياتها هي أعداد طبيعية و فواصلها x محصورة بين 0 و 100.

التمرين (27) n عدد طبيعي غير معدوم .نعتبر العددين a **و** b حيث :
$a=11n+3$ و $b=13n-1$
1) برهن أن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم أيضا للعدد 50
2) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $50x-11y=3$
3) استنتج قيم n التي يكون من أجلها 50 القاسم المشترك الأكبر للعددين a **و** b
4) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 25 القاسم المشترك الأكبر للعددين a **و** b

التمرين (28) 1/ برهن أن العدد الطبيعي n يقبل القسمة على 42 إذا وفقط إذا كان n يقبل القسمة على العددين 6 و 7 .
2/ في النظام ذي الأساس 8 يكتب عدد طبيعي n كما يلي : $n=\overline{3a4b}$.
أ) اكتب في الأساس 8 كل الأعداد الطبيعية n التي تقبل القسمة على 42
ب)بين أن هذه الأعداد تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية يطلب تعيين أساسها في النظام ذي الأساس 8

التمرين (29) 1. نعتبر المعادلة (E) : $109x-226y=1$ حيث x و y عددان صحيحان .
أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 . ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟
ب) برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(141+226k;68+109k)$ ، حيث k عدد صحيح .
جــ) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر من أو يساوي 226؛ ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e يحقق $109d=1+226e$ (يطلب تعيين قيمتي d و e).
2. . برهن أن 227 عدد أوّلي .
3. نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a\le 226$. نعتبر الدالتين f و g للمجموعة A في نفسها f ترفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{109} على 227 ؛ g ترفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{141} على 227 .
أ) تحقق من أنّ $g\left[f(0)\right]=0$.
ب) برهن أنه من أجل كل $a\in A-\{0\}$ ، $a^{226}\equiv 1[227]$.
جــ) استنتج من **1**. ب) أنه من أجل كل $a\in A-\{0\}$ ، $g\left[f(a)\right]=a$. ما القول عن $f\left[g(a)\right]=a$ ؟

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (30) **1** . أ ــ عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9 .
ب ــ برهن إذن $2005^{2005} \equiv 7[9]$.
2. أ ــ برّر أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $10^n \equiv 1[9]$.
ب ــ N عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري ، نسمي S مجموع أرقامه . برهن العلاقة التالية : $N \equiv S[9]$.
جـ ــ استنتج أن : يكون N قابلا للقسمة على 9 إذا وفقط إذا كان S قابلا للقسمة على 9 .
3. نفترض أن $A = 2005^{2005}$، نضع : B مجموع أرقام العدد A .
C مجموع أرقام العدد B . D مجموع أرقام العدد C .
أ ــ برر أن $A \equiv D[9]$.
ب ــ علما أن $2005 < 10000$ ، برهن أن العدد A يكتب في التعداد العشري على الأكثر بــ 8020 رقما . استنتج أن $B \le 72180$.
جــ ــ برهن أن $C \le 45$.
د ــ بدراسة قائمة الأعداد الطبيعية الأصغر من 45 ، عين عنصرا حادا للعدد D أصغر من 15 .
هــ ــ برهن أن $D = 7$.

التمرين (31) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر الأعداد :
$a_n = 4\times 10^n - 1$ ، $b_n = 2\times 10^n - 1$ و $c_n = 2\times 10^n + 1$.
1. أ) احسب a_3 ، b_3 ، c_3 ثم برهن أن b_3 عدد أولي .
ب) برهن أن كل من a_n و c_n يقبلان القسمة على 3.
2. أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم يكون : $b_n \times c_n = a_{2n}$
ب) استنتج تحليلا لجداء عوامل أولية للعدد a_6.
ج) برهن أن : $PGCD(b_n; c_n) = PGCD(c_n; 2)$ و استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما .
3. نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $b_3 x + c_3 y = 1........(E)$
أ) برر أن المعادلة (E) تقبل، على الأقل ، حلا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
ب) أوجد حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E) .

التمرين (32) **الجزء الأول :(سؤال درس)**
-ما هي خواص التلاؤم لعلاقة الموافقة مع الجمع و الضرب والأس
- برهن خاصية التلاؤم مع الضرب
الجزء الثاني :نرمز بــ $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b$ إلى أرقام النظام ذي الأساس 12.
1. أ- N_1 عدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $N_1 = \overline{b1a}^{12}$
عيّن كتابة N_1 في النظام العشري
ب -N_2 عدد مكتوب في النظام العشري كما يلي : $N_2 = 1131$
اكتب العدد N_2 في النظام ذي الأساس 12

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

في كل مايلي عدد طبيعي N يكتب بشكل عام في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $N=\overline{a_n......a_1a_0}^{12}$

2. أ-برهن أن : $N\equiv a_0[3]$ ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على3 لعدد طبيعي مكتوب في النظام 12.

ب- انطلاقا من الكتابة في النظام ذي الأساس 12 ، حدد إذاكان N_2 يقبل القسمة على 12 ثم تحقق من صحة ذلك بكتابته في النظام العشري .

3.أ-برهن أن : $N\equiv a_n+...+a_1+a_0[11]$ ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11لعدد طبيعي مكتوب في النظام 12.

ب- انطلاقا من الكتابة في النظام ذي الأساس 12 ، حدد إذاكان N_1 يقبل القسمة على 11 ثم تحقق من صحة ذلك بكتابته في النظام العشري .

4. N عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $\overline{x\,4y}^{12}$. عين الأعداد الطبيعية x و y حتى يكون العدد N يقبل القسمة على 33 .

التمرين (33) 1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بواقي قسمة العدد 10^n على 13

ب) أوجد باقي قسمة العدد $A=23^{1430}-3^{2009}$ على 13.

2) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدودها كما يلي :

$$u_1=1 \text{ ، } u_2=11 \text{ ، } u_3=111 \text{ ،.......، } u_n=\underbrace{11.....1}_{n\text{ مــرة الرقم } 1}$$

أ) برهن أن $u_n=\dfrac{10^n-1}{9}$

ب) ماهو أصغر حد من حدود المتتالية (u_n) يكون مضاعفا للعدد 13؟

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=u_1+u_2+.......+u_n$

الهدية

في أهمية اللغات

بقــــــدر لغات المرء يكثر نفعه فتلك له عند الملمَّات أعوان

فأقبل على درس اللغات وحفظها فكل لسان في الحقيقة إنسان! .

قال زيد : أمرني رسول الله ــ صلى الله عليه وسلم ــ فتعلمتُ له كتاب يهود بالسريانية وقال: إني والله ما آمن يهود على كتابي، فما مر لي نصف شهر حتى تعلمته وحذقته، فكنت أكتب له إليهم، واقرأ له كتبهم. (رواه البخاري، وأبو داود والترمذي)

حكم بالانجليزية

1/ Proverbs are the adornment of speech
2/A friend in need is friend indeed.
3/ A tree is known by its fruit
4/ Brids of feather flock together
5/ Action speak louder than words

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار