المحتوى المعرفي : تقويم تشخيصي . المستوى : 3 آ و ف .

الأستاذ : سي محمد سمير .

تقويم تشخيصي .

التمرين ① : $u_7 = 31$ ، $u_2 = 11$

① تعيين الأساس r والحد الأول u_0 :

لدينا : $u_n = u_p + (n-p)r$ أي : $u_7 = u_2 + 5r$ أي : $5r = 20$ ومنه : $r = 4$

ولدينا : $u_2 = u_0 + 2r$ ومنه : $u_0 = 3$

② كتابة عبارة الحد العام لـ : u_n وإستنتاج إتجاه تغيرها :

لدينا : $u_n = u_0 + nr$ ومنه : $u_n = 3 + 4n$

بما أن : $r > 0$ و $u_0 = 3$ فإن المتتالية متزايدة تماما .

③ إثبات أن 83 حد من حدود المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n = 83$ أي : $3 + 4n = 83$ ومنه : $n = 20$ بما أن $n \in \mathbb{N}$

إذن : 83 حد من حدود المتتالية (u_n) . أي ورتبته $u_{20} = 83$

④ حساب المجموع S :

لدينا : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$

$$S = \left(\frac{u_0 + u_{20}}{2}\right) \times 21 = \left(\frac{3+83}{2}\right)(21) = 903$$

ومنه : $S = 903$

التمرين ② : $u_n = 4 \times 5^n$

① حساب كل من u_0 ، u_1 :

$u_1 = 20$ ، $u_0 = 4$

② إثبات أن (u_n) م هـ يطلب تعيين q و u_0 :

أ) $u_{n+1} = 4 \times 5^{n+1}$ أي : $u_{n+1} = (4 \times 5^n) \times 5$ ومنه : $u_{n+1} = 5u_n$

ب) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 5$ ومنه : المتتالية (u_n) م هـ أساسها $q = 5$.

③ دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : $q > 1$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

④ حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا : $S_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ أي : $S_n = 4 \times \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}$ ومنه : $S_n = 5^{n+1} - 1$

⑤ تعيين قيمة العدد الطبيعي n : حيث : $S_n = 624$

لدينا : $5^{n+1} - 1 = 624$ أي : $5^{n+1} = 625$ أي : $5^{n+1} = 5^4$ ومنه : $n = 3$

تقويم تشخيصي.

التمرين ③:

تعيين الدالة المشتقة وإشارتها:

1) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ المشتقة: $f'(x) = 4x - 8$

إشارتها: $f'(x) = 0$ أي $x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$

المشتقة: $g'(x) = x^2 - 2x - 8$

إشارتها: $g'(x) = 0$ أي: $\sqrt{\Delta} = 6$ ، $x_1 = -2$ ، $x_2 = 4$

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3) $c(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

المشتقة: $c'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ إشارتها: متزايدة تماما.

4) $h(x) = \frac{x+2}{x-2}$ المشتقة: $h'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2}$ إشارتها: سالبة تماما.

التمرين ④:

1) تبيين أن الدالة f تكتب على الشكل: $f(x) = 1 - \frac{4}{x+1}$:

لدينا: $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ أي: $f(x) = \frac{x-3+1-1}{x+1}$ ومنه: $f(x) = 1 - \frac{4}{x+1}$

2) حساب كل من: $f(+1)$ و $f(3)$:

$f(+1) = -1$ ، $f(3) = 0$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f وإنجاز جدول تغيراتها:

لدينا: $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ إشارتها: $f'(x) > 0$ موجبة تماما.

إذن: الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	↗	‖	↗

4) كتابة معادلة المماس عند $x_0 = 3$:

لدينا: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$y = \frac{1}{4}(x-3) + 0$

$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

من أجل: $x = 1$ نجد: $y = 1(x-1) - 1$

$y = x - 2$

المحور: القسمة الإقليدية.　　　　　　　　　　　　　　المستوى: 3آوف.

المحور المعرفي: القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

الكفايات المستهدفة: - معرفة وتحديد حاصل القسمة الإقليدية وباقيه.

- حصر عدد بين مضاعفين متتابعين لعدد صحيح.

سير الدرس.

① نشاط:

ⓐ عين باقي وحاصل قسمة a على b، ثم أحصر العدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b في كل حالة من الحالات الآتية:

$a=92$ و $b=5$، $a=137$ و $b=12$، $a=676$ و $b=13$.

ⓑ هل العدد $(92-27)$ من مضاعفات العدد 5.

مناقشة النشاط:

ⓐ تعيين باقي وحاصل قسمة a على b:

لدينا: $92 = 5 \times 18 + 2$

باقي قسمة 92 على 5 هو: 2 وحاصل القسمة هو: 18.

$$\begin{array}{r|l} 92 & 5 \\ \hline 2 & 18 \end{array}$$

لدينا: $137 = 12 \times 11 + 5$

باقي قسمة 137 على 12 هو: 5 وحاصل القسمة هو: 11.

$$\begin{array}{r|l} 137 & 12 \\ \hline 5 & 11 \end{array}$$

لدينا: $676 = 13 \times 52 + 0$

باقي قسمة 676 على 13 هو: 0 وحاصل القسمة هو: 52.

$$\begin{array}{r|l} 676 & 13 \\ \hline 0 & 52 \end{array}$$

* حصر العدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b:

لدينا: $92 = 5 \times 18 + 2$

$5 \times 18 \leq 92 < 5 \times 19$ أي: $90 \leq 92 < 95$

لدينا: $137 = 12 \times 11 + 5$

$12 \times 11 \leq 137 < 12 \times 12$ أي: $132 \leq 137 < 144$

لدينا: $676 = 13 \times 52 + 0$

$13 \times 52 \leq 676 < 13 \times 53$ أي: $676 \leq 676 < 689$

ⓑ العدد $(92-27)$ من مضاعفات العدد 5:

لأن: $92-27=65$ والعدد 65 من مضاعفات العدد 5.

العدد التام :

تعريف : نقول عن عدد طبيعي أنه تام إذا كان العدد مساوي لمجموع كل قواسمه الموجبة ماعدا نفسه .

مثال :

العددين 6 و 28 كاملات لأن :

العدد 6 كامل لأن قواسمه الموجبة على التوالي: 1، 2، 3 و 6

ولدينا : $1+2+3=6$.

*** قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:**

تعريف :

a و b عددان صحيحان و b غير معدوم، نقول أن العدد b يقسم a يعني وجود عدد صحيح k حيث : $a=kb$ ونقول كذلك أن b قاسم للعدد a أو أن a مضاعف للعدد b ونكتب : a/b
ونقرأ b يقسم a .

أمثلة :

$60=4\times15$ ومنه : $60/15$ ونقرأ : 15 يقسم 60 . ، $k=4$

$32=(-4)(-8)$ ومنه : $32/(-8)$ ونقرأ : -8 يقسم 32 . ، $k=-4$

ملاحظة : للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$.

*** القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:**

مبرهنة :

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم، توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث :
$$\begin{cases} a=bq+r \\ 0\leq r<b \end{cases}$$

توضيح :
$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$
ونكتب : $a=bq+r$

a : المقسوم ، b : المقسوم عليه أو القاسم

q : حاصل القسمة ، r : باقي القسمة.

ملاحظات : ① البحث عن الثنائية (q,r) يسمى بالقسمة الإقليدية.

② في حالة a و b عددان صحيحان نحصل على :

$\{ a=bq+r$

المستوى: 3 آ وف.

سير الدرس.

أمثلة:

1) $23 = 5\times4+3$ ، 4 هو حاصل قسمة 23 على 5 و 3 هو الباقي.

2) $a=-49$ ، $b=-6$. $-49=(-6)(9)+5$ ، $q=9$ ، $r=5$

ولدينا: $0 \le r < |b|$ محققة لأن: $0 \le 5 < |-6|$ معناه: $0 \le 5 < 6$.

* حصر عدد صحيح بين مضاعفين متتاليين لعدد صحيح:

> نقول عن العدد a أنه محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b
> أي يوجد عدد صحيح q حيث: $qb \le a < b(q+1)$

نشاط 2 تقويمي:

عين باقي وحاصل قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي b
ثم أحصر العدد a بين مضاعفين متتاليين للعدد b في كل حالة:

1) $a=118$ و $b=5$

2) $a=-152$ و $b=7$

مناقشة النشاط 2:

* **باقي وحاصل قسمة a على b:**

1) $118=5\times23+3$ ، 23 حاصل القسمة و 3 باقي القسمة.

2) $-152=7\times(-22)+5$ ، (-22) ″ ″ و 5 ″ ″ .

* **الحصر:**

1) $5\times23 \le 118 < 5\times24$ أي: $115 \le 118 < 120$

2) $7\times(-22) \le -152 < 7\times(-21)$ أي: $-154 \le -152 < -147$

عمل منزلي: ت 1، 2، 3، 4 ص 22.

المستوى: 3آف.

الكفاءة المستهدفة: تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي.

سير الدرس.

نشاط:

① أوجد قواسم العدد 16.

② حلل العدد 500 إلى جداء عوامل أولية.

③ إستنتج عدد قواسم العدد 500 ثم أوجدها.

مناقشة النشاط

① قواسم العدد 16:

التحليل:

16	2
8	2
4	2
2	2
$\boxed{1}$	

$16 = 2^4$

عدد قواسم العدد 16 هو 5.

قواسم العدد 16 هي: 1، 2، 4، 8، 16.

② تحليل العدد 500 إلى جداء عوامل أولية:

500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
$\boxed{1}$	

$500 = 2^2 \times 5^3$

③ عدد قواسم العدد 500 هو: 12

$(2+1)(3+1) = 12$

إيجاد قواسم العدد 500:

لإيجاد مجموعة قواسم العدد 500 ولتكن D_{500} نستعمل الشجرة الآتية:

$2^0 = 1$: $5^0 \longrightarrow 1$ ، $5^1 \longrightarrow 5$ ، $5^2 \longrightarrow 25$ ، $5^3 \longrightarrow 125$

$2^1 = 2$: $5^0 = 1 \longrightarrow 2$ ، $5^1 = 5 \longrightarrow 10$ ، $5^2 = 25 \longrightarrow 50$ ، $5^3 = 125 \longrightarrow 250$

$2^2 = 4$: $5^0 = 1 \longrightarrow 4$ ، $5^1 = 5 \longrightarrow 20$ ، $5^2 = 25 \longrightarrow 100$ ، $5^3 = 125 \longrightarrow 500$

إذن مجموعة قواسم العدد 500 هي:

$D_{500} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500\}$

تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي:

طريقة:

لإيجاد مجموعة قواسم عدد طبيعي n غير معدوم نتبع الخطوات التالية:

1) نحلل العدد إلى جداء عوامل أولية كمايلي: $n = a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times \dots \times a_p^{\alpha_p}$

2) نعين عدد القواسم كمايلي: $(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)\times\dots\times(\alpha_p+1) = $ ع ق

3) نحسب القواسم وذلك بضرب كل عدد من عوامل الجداء في الأعداد الباقية باستعمال الشجرة. مثلا: قوى العدد 2^3 هي $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$.

المستوى : 3أوف

سير الدرس .

ملاحظة :

مجموعة قواسم العدد 0 هي مجموعة الأعداد الطبيعية N .

نشاط تكويني :

1) عين مجموعة القواسم الموجبة للعدد 90 .

2) عين القواسم الموجبة الزوجية للعدد 90 .

3) 〃 〃 〃 للعدد 90 والتي هي مضاعفة للعدد 5 .

مناقشة النشاط :

1) تعيين مجموعة القواسم الموجبة للعدد 90 :

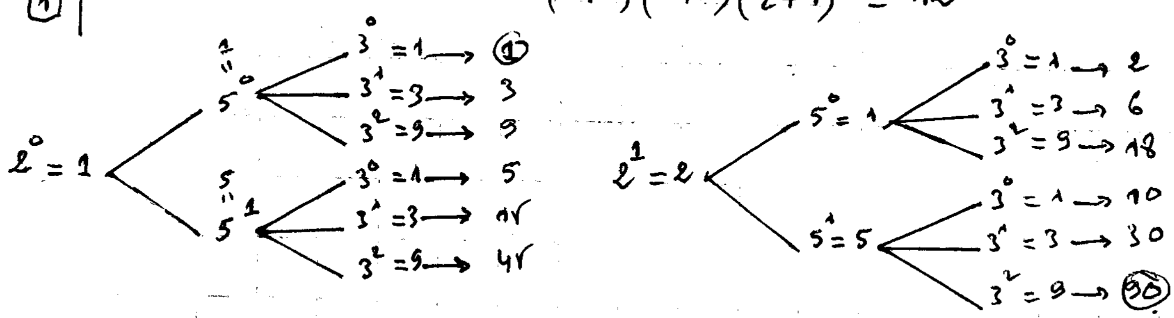
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$90 = 2\times 3^2\times 5$

أي $90 = 2^1\times 5^1\times 3^2$

عدد القواسم هو : 12

$(1+1)(1+1)(2+1) = 12$



مجموعة القواسم هي : $D_{90} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$

2) القواسم الموجبة الزوجية للعدد 90 هي :

2 , 6 , 10 , 18 , 30 , 90 .

3) القواسم الموجبة للعدد 90 والتي هي مضاعفة للعدد 5 هي :

5 , 10 , 15 , 30 , 45 , 90 .

المحتوى المعرفي: الموافقات في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$. المستوى: 3 آ ف.
الكفاءة المستهدفة: معرفة توافق عددين صحيحين
(أو موافقة عدد لعدد بترديد n)

سير الدرس.

نشاط 2 ص 8: الجزء 3.

1) باقي قسمة العدد 660 على 7 هو 2. $660 = 7\times 94 + 2$
" " 366 " 7 " 2 $366 = 7\times 52 + 2$
نلاحظ أن العددين 660 و 366 لهما نفس الباقي في القسمة على 7.
إذن: نقول عن العددين 660 و 366 أنهما متوافقان بترديد 7
ونكتب: $660 \equiv 366\ [7]$. ونقرأ: 660 توافق 366 بترديد 7 $153 \equiv 2008\ [5]$ أي إن

2) - باقي قسمة العدد 153 على 5 هو 3 } نعم العددين 153 و 2008
- " " 2008 " 5 " 3 } متوافقان بترديد 5 لأن لهما نفس البا.

3) - باقي قسمة العدد 274 على 3 هو 1 } إذن العددان 274 و 69 ليسا
- " " 69 على 3 هو 0. } متوافقان بترديد 3. أي $274 \not\equiv 69\ [3]$

4) - باقي قسمة العدد $a = 234$ على 11 هو 3
- " " $b = 146$ " 11 " 3
نلاحظ أن العددين 234 و 146 متوافقان بترديد 11 لأن لهما
نفس الباقي في القسمة على 11. ونكتب: $234 \equiv 146\ [11]$
- باقي قسمة $a-b$ على 11 هو 0. $a \equiv b\ [n]$.

الموافقات في $\mathbb{Z}$:

تعريف:

n عدد طبيعي غير معدوم، نقول أن عددين صحيحين a و b متوافقان
بترديد n أي إن لـ a و b نفس الباقي في القسمة على n.
ونكتب: $a \equiv b\ [n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n.

أمثلة:

$4 \equiv 2\ [2]$ ، $17 \equiv 11\ [3]$ ، $-20 \equiv 1\ [7]$ ، $-59 \equiv -3\ [8]$

ملاحظة: من أجل كل عدد صحيح x فإن: $x \equiv 0\ [1]$

مبرهنة:

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. لدينا $a \equiv b\ [n]$
يكافئ $(a-b)$ مضاعف للعدد n وأن للعددين a و b
نفس الباقي في القسمة على n.

مثال: $26 \equiv 11\ [5]$ لأن: $a-b = 26-11 = 15$ و 15 مضاعف لـ 5.

المستوى : 3 آوف :

سير الدرس .

خاصية :

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 أي ($n \geq 2$)
كل عدد صحيح a يوافق بترديد n باقي قسمته على n . و $0 \leq r < n$

مثال : تنبيه : ننبه إلى عدم تطبيق كل خواص المساواة من الموافقة. مثال: $27 \equiv 21[6]$ لكن: $9 \not\equiv 7[6]$

$17 \equiv 7[5]$ هنا 17 و 7 متوافقان بترديد 5 لكن 7 ليس باقي قسمة 17 على 5

لأن : $7 \geq 5$ أما الباقي فهو 2 لأن : $17 \equiv 2[5]$ أي: $0 \leq 2 < 5$.

أنشطة تمهيدية :

تمرين 21 ص 23 :

تبرير صحة العبارات التالية :

أ) $45 \equiv 3[7]$ لأن :

ط1) باقي قسمة 45 على 7 هو 3 . إذن العددين 45 و 3 متوافقان بترديد 7.
" " 3 " 7 هو 3 } لأن لهما نفس الباقي في.

ط2) $45 - 3 = 42$ و 42 مضاعف لـ 7 . إذن : $45 \equiv 3[7]$ و $42 = 6 \times 7$

ب) $152 \equiv 2[3]$ لأن : $152 - 2 = 150$ و 150 مضاعف لـ 3 .

ج) $29 \equiv -1[6]$ لأن : $29 - (-1) = 30$ و 30 مضاعف لـ 6 .

د) $137 \equiv -3[5]$ لأن : باقي قسمة 3- على 5 هو 2 .
و باقي " 137 على " هو 2 .

هـ) $-17 \equiv -7[10]$ لأن $-17 - (-7) = -10$ و -10 مضاعف لـ 10 .

و) $-13 \equiv 2[5]$ لأن : $-13 - 2 = -15$ و -15 مضاعف لـ 5 .

تمرين 29 ص 23 :

كتابة العبارات باستعمال الموافقات بترديد n :

لديت من الخاصية السابقة كل عدد صحيح a يوافق بترديد n باقي قسمته على n.

إذن : $a \equiv 4[n]$ ، $b \equiv 44[n]$ ، $c \equiv -34[n]$

عمل منزلي : ت 23، 26، 28 ص 23 .

المستوى : 3 آ ر ف

الكفاءة المستهدفة : - معرفة خواص الموافقة واستعمالها في حل مشاكل.

سير الدرس.

خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$:

n عدد طبيعي غير معدوم ، a، b، c و d أعداد صحيحة.

1) $a \equiv a[n]$

2) إذا كان : $a \equiv b[n]$ فإن : $b \equiv a[n]$.

3) إذا كان : $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن : $a \equiv c[n]$.

4) " " : $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن : $a+c \equiv b+d[n]$.

5) إذا كان : $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن : $a \times c \equiv b \times d[n]$.

6) p عدد طبيعي غير معدوم : إذا كان : $a \equiv b[n]$ فإن : $a^p \equiv b^p[n]$.

ملاحظة : نستطيع تعميم الخاصية 4 إلى جداء عدة أعداد صحيحة.

نتيجة عامة :

الموافقة بترديد n متلائمة مع الجمع والطرح والضرب والرفع إلى القوة وليست متلائمة مع القسمة والجذر التربيعي.

أمثلة :

1) $5 \equiv 5[2]$ 2) $26 \equiv 11[5]$ و $11 \equiv 26[5]$.

3) $15 \equiv 19[4]$ ، $19 \equiv 23[4]$ إذن : $15 \equiv 23[5]$.

4) $16 \equiv 6[5]$ و $12 \equiv 2[5]$ بالجمع نجد : $12+16 \equiv 2+6[5]$ أي : $28 \equiv 8[5]$

5) $19 \equiv 37[9]$ و $48 \equiv 66[9]$ بالضرب نجد : $48 \times 19 \equiv 66 \times 37[9]$ أي : $912 \equiv 2442[9]$.

6) $17 \equiv 7[5]$ إذن : $17^{2013} \equiv 7^{2013}[5]$

أنشطة تقويمية :

تمرين 23 ص 32 :

a

1) باقي قسمة الأعداد a، b و c على 10 :

باستعمال حاسبة نجد أن بواقي الأعداد a، b و c على 10 هي : 7، 3، 4 على الترتيب.

2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية على 10 لكل من الأعداد التالية :

أ) $a+b+c$ لدينا : $\begin{cases} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{cases}$ وبتطبيق خاصية الجمع نجد : $a+b+c \equiv 7+3+4[10]$ ومنه : $a+b+c \equiv 14[10]$

وبما أن : $14 \equiv 4[10]$ فإنه بالتعدي :

المستوى: 3آوف

سير الدرس.

ب) $a-b+c$:

ومنه: $a+b+c \equiv 7-3+4\,[10]$ $a-b+c \equiv 8\,[10]$ ومنه الباقي هو: 8.

ج) abc :

أي: $abc \equiv 7\times3\times4\,[10]$: $abc \equiv 84\,[10]$ وبما أن: $84\equiv4\,[10]$ فإن:

$abc \equiv 4\,[10]$ ومنه الباقي هو 4.

هـ) $ab+ac+bc$:

أي $ab+ac+bc \equiv 7\times3+7\times4+3\times4\,[10]$: $ab+ac+bc \equiv 61\,[10]$ وبما أن: $61\equiv1\,[10]$:

فإن: $ab+ac+bc \equiv 1\,[10]$ ومنه الباقي هو 1.

و) $a^2+b^2+c^2$:

أي $a^2+b^2+c^2 \equiv 7^2+3^2+4^2\,[10]$: $a^2+b^2+c^2 \equiv 74\,[10]$ وبما أن: $74\equiv4\,[10]$ فإن،

$a^2+b^2+c^2 \equiv 4\,[10]$ ومنه الباقي هو 4.

التمرين ②: BAC 2011

a، b، c أعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3 وباقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

① عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين: $a\times b$ ، a^2-b^2

② أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $c^{2n}\equiv1\,[7]$

ب) تحقق أن $48\equiv6\,[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين: 48^{2010} و 48^{2011} على 7.

الحل:

① تعيين باقي القسمة الإقليدية على 7:

لدينا: $a\equiv3\,[7]$ ، $b\equiv4\,[7]$ و $c\equiv6\,[7]$.

باستعمال خواص الموافقات نجد:

* $a\times b\equiv3\times4\,[7]$ أي: $a\times b\equiv12\,[7]$ أي $a\times b\equiv12-7\,[7]$ ومنه: $a\times b\equiv5\,[7]$

إذن باقي قسمة $a\times b$ على 7 هو 5.

* $a^2-b^2\equiv3^2-4^2\,[7]$: $a^2\equiv3^2\,[7]$ أي: $a^2\equiv9\,[7]$ ومنه: $a^2\equiv2\,[7]$

$b^2\equiv16\,[7]$ أي: $b^2\equiv2\,[7]$.

وبالتالي: $a^2-b^2\equiv(2-2)\,[7]$ ومنه: $a^2-b^2\equiv0\,[7]$

إذن باقي قسمة a^2-b^2 على 7 هو 0.

سير الدرس .

4) أ) إثبات أن : $c^{2n} \equiv 1[7]$:

لدينا : $c \equiv 6[7]$ وعليه : $c \equiv 6-7[7]$ ومنه : $c \equiv -1[7]$ وبالتالي :

$c^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7]$ بما أن : $2n$ عدد زوجي فإن : $c^{2n} \equiv 1[7]$

ب) التحقق أن $48 \equiv 6[7]$:

لدينا : $48 = 6 \times 7 + 6$ ومنه : $48 \equiv 6[7]$

* استنتاج باقي قسمة 48^{2010} و 48^{2011} على 7 :

بما أن : $48 \equiv 6[7]$ فإن : $48 \equiv -1[7]$ وعليه : $48^{2010} \equiv (-1)^{2010}[7]$

ومنه : $48^{2010} \equiv 1[7]$ لأن ؛ 2010 عدد زوجي من الشكل $2n$.

إذن باقي قسمة العدد 48^{2010} على 7 هو 1 .

$48^{2011} \equiv (-1)^{2011}[7]$ أي : $48^{2011} \equiv -1[7]$ أي : $48^{2011} \equiv 6[7]$ لأن 2011 فردي

إذن باقي قسمة العدد 48^{2011} على 7 هو 6 .

عمل منزلي ، ت 31) ، 33) ، 34) ص 23 .

التشفير التآلفي :

يستعمل التشفير لإخفاء المعلومات والمراسلات وقد شاع في أيامنا إستعمال هذا المصطلح .

طريقة : تتلخص طريقة التشفير التآلفي في إرفاق كل حرف أبجدي مرقم بعدد x (حيث $0 \leq x \leq 27$ في حالة الأبجدية العربية) بالعدد الطبيعي y باقي قسمة $ax+b$ على 28 أي المعرف بـ $y \equiv ax+b[28]$

حيث a $(a \neq 0)$ و b عددان طبيعيان معلومان فقط من طرف المرسل والمستقبل . تسمى الثنائية (a,b) مفتاح الشفرة .

مثال 4 ص 18 ~~مهم~~ .

1) الكلمة التي تشفيرها "لكح ي" ، "ح م ن ض ج ز ط" .

هي : ~~خمسة~~ بالك ، الجزائر .

2) تشفير العبارة : "خمسة جويلية عيد الاستقلال" :

هي : "ش ع ت س" ، "ن ث ز م ز س" ، "ذ ز ف" ، "ح م ح ت س و م ح م" .

طريقة :

طريقة التشفير التآلفي هي إرفاق كل حرف أبجدي مرقم بعدد x بالعدد الطبيعي y باقي قسمة $ax+b$ على 28 $(a \neq 0)$ أي : $y \equiv ax+b[28]$

تسمى الثنائية (a,b) مفتاح الشفرة يعلمها المرسل والمرسل إليه فقط .

المحتوى المعرفي: مبدأ الاستدلال بالتراجع.   المستوى: 3 آوف

الكفاءة المستهدفة: - استعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع لإثبات صحة خاصية من أجل كل عدد طبيعي n.

سير الدرس.

نشاط:

لتكن الخاصية التالية من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $(n \geq 1)$.

$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ نرمز لهذه الخاصية بالرمز $P(n)$.

1) عين $P(1)$ وتأكد أنها صحيحة.

2) أحسب $P(n+1)$.

3) أثبت أنه إذا كانت $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $(n \geq 1)$ فإن $P(n+1)$ صحيحة من أجل ~~كل عدد طبيعي~~ $n+1$.

مناقشة النشاط:

1) **تعيين $P(1)$ والتأكد من صحتها:**

لدينا: من أجل $n=1$ نجد: $P(1)=1$

التأكد: لدينا: $1=\frac{1(1+1)}{2}$ أي: $1=1$. إذن: $P(1)$ صحيحة.

2) **حساب $P(n+1)$:**

$$P(n+1): 1+2+3+\dots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

3) **الإثبات:**

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $(n \geq 1)$ ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$

أي: $P(n+1): 1+2+3+\dots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا: $1+2+3+\dots+n+(n+1)=(1+2+3+\dots+n)+(n+1)$

أي: $=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

ومنه: $=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

ومنه: الخاصية صحيحة من أجل $n+2$ .... (2)

من (1) و (2) يستنتج أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

* **مبدأ الاستدلال بالتراجع:**

قاعدة:

$P(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $n \geq n_0$.

1) نتأكد من صحة الخاصية $P(n_0)$ من أجل n_0.

2) نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $P(n+1)$.

سير الدرس .

توضيح :

المرحلة ①: $P(n_0)$ صحيحة.

المرحلة ②: إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل $n \geq n_0$ فإن : $P(n)$ صحيحة.

مثال :

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$0+2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$$

الحل:

نسمي هذه الخاصية بـ : $P(n)$.

المرحلة ①: نتأكد أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

لدينا : الطرف الأول : 0.

" الثاني: $0(0+1)=0$.

$0=0$ الطرفان متساويان.

إذن الخاصية $P(0)$ صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة ②: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل n طبيعي ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا :

$$P(n+1) : 0+2+4+6+\dots+2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

ولدينا:

$$P(n+1) : \underbrace{0+2+4+6+\dots+2n}_{n(n+1)}+2(n+1) = n(n+1)+2(n+1)$$

$$= (n+2)(n+1)$$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة. إذن من م(1) و م(2) نستنتج أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي أن: $0+2+4+\dots+2n = n(n+1)$

نشاط تقويمي:

باستعمال البرهان بالتراجع أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3^{2n+2}-2^{n+1}$ مضاعف للعدد 7.

المستوى : 3 آف

سير الدرس .

مناقشة التمرين 2 ط التقويمي :

البرهان بالتراجع أن $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ مضاعف لـ 7 :

المرحلة 1 : نسمي الخاصية بـ : $P(n)$.

من أجل $n=0$ لدينا : $3^{2(0)+2} - 2^{0+1} = 3^2 - 2^1 = 9-2 = \boxed{7}$

و 7 مضاعف للعدد 7 وعليه $P(0)$ صحيحة .

المرحلة 2 :

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أن $3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1}$

أي : $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7K$ مضاعف للعدد 7 أي : $3^{2n+4} - 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

لدينا : $3^{2n+4} - 2^{n+2} = 3^{(2n+2)+2} - 2^{(n+1)+1} = 3^{2n+2} \times 3^2 - 2^{n+1} \times 2$

$= 9 \times 3^{2n+2} - 2 \times 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n+2} - (9-7) \times 2^{n+1}$

$= 9(3^{2n+2} - 2^{n+1}) + 7 \times 2^{n+1}$

لكن : نعلم أن : $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7K$ ومنه نجد : $3^{2n+4} - 2^{n+2} = 9(7K) + 7 \times 2^{n+1}$

أي : $3^{2n+4} - 2^{n+2} = 7(\underbrace{9K + 2^{n+1}}_{K'})$ ، ومنه $3^{2n+4} - 2^{n+2} = 7K'$

ومنه : $P(n+1)$ صحيحة وعليه : $3^{2n+2} - 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

حل منزلي : ت 36 ، 37 ص 23

مراجعة : تمرين 1 و 2 ص 17 مع الحلول .

المستوى: 3 آ و ف

المحور: المتتاليات العددية

الكفاءات المستهدفة: - التمييز بين متتالية وحدها العام. - التعرف على متتالية بالتراجع.
- حساب الحدود الأولى لمتتالية معرفة بالتراجع.

سير الدرس.

نشاط:

① (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 4n - 5$.

أ) أحسب الحدود: U_0، U_1، U_2.

ب) أكتب بدلالة n الحدود: U_{n+1}، U_{2n}، U_{n-1}.

② (V_n) متتالية عددية معرفة ~~على $\mathbb{N}^*$ أي~~ $n \geq 1$ حيث: $\begin{cases} V_1 = 1 \\ V_{n+1} = 2V_n + 1 \end{cases}$

- أحسب الحدود V_2، V_3، V_4.

الحل:

①أ) حساب الحدود U_0، U_1، U_2:

من أجل $n = 0$ نجد: $U_0 = -5$. من أجل $n = 1$ نجد: $U_1 = -1$

من أجل $n = 2$ نجد: $U_2 = 3$

ب) كتابة بدلالة n كل من: U_{n+1}، U_{2n}، U_{n-1}:

لدينا: $U_{n+1} = 4(n+1) - 5$ أي: $U_{n+1} = 4n + 4 - 5$ ومنه: $U_{n+1} = 4n - 1$

أي: $U_{2n} = 4(2n) - 5$ ومنه: $U_{2n} = 8n - 5$

أي: $U_{n-1} = 4(n-1) - 5$ أي: $U_{n-1} = 4n - 4 - 5$ ومنه: $U_{n-1} = 4n - 9$

② حساب الحدود V_2، V_3، V_4:

من أجل $n = 1$ نجد: $V_2 = 2V_1 + 1$ ومنه: $V_2 = 3$

" " $n = 2$ نجد: $V_3 = 2V_2 + 1$ ومنه: $V_3 = 7$

" " $n = 3$ نجد: $V_4 = 2V_3 + 1$ ومنه: $V_4 = 15$

① **تعريف متتالية:**

متتالية U هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $U(n)$.

ملاحظات:

① إذا كانت المتتالية U معرفة على $\mathbb{N}$ نرمز إلى حدها الأول بالرمز U_0.

② " " " " " " $\mathbb{N}^*$ " " " " " " U_1.

③ يجب التمييز بين متتالية (U_n) وبين حدها U_n الذي هو عدد حقيقي.

② طرق توليد متتالية :

① توليد متتالية بالحد العام :

تعريف : يمكن تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ بوضع من أجل كل عدد طبيعي n مع $n\geq n_0$ ، $u_n=f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[n_0;+\infty[$.

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $u_n=3n+2$.

لدينا : $u_n=f(n)$ حيث f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ ب : $f(x)=3x+2$.

العلاقة $u_n=3n+2$ تسمح بحساب الحدود u_0, u_1, u_2 .

من أجل $n=0$ نجد : $u_0=2$ ، من أجل $n=1$ نجد : $u_1=5$

" " $n=2$ " : $u_2=8$.

② توليد متتالية بعلاقة تراجعية :

تعريف : يمكن تعريف متتالية بالتراجع بإعطاء :
① قيمة الحد الأول .
② علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية.

مثال : المتتالية المعرفة كمايلي : $\begin{cases}u_0=3\\u_{n+1}=2u_n-1\end{cases}$
هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية .

تمارين للمراجعة : تمرين ① و ② و ③ ص 33 مع الحلول .

عمل منزلي : تمرين ① و ③ ص 44 . ش.

الحل :

تمرين ① ص 44 :

أ) حساب الحدود الخمس الأولى : لدينا : $u_n=\frac{1}{n+1}$

$u_0=1$ ، $u_1=\frac{1}{2}$ ، $u_2=\frac{1}{3}$ ، $u_3=\frac{1}{4}$ ، $u_4=\frac{1}{5}$

ب) $u_1=-5$ ، $u_2=-14$ ، $u_3=-41$ ، $u_4=-122$

تمرين ③ ص 44 :

حساب الحدود u_1, u_2 و u_3 : $u_0=2$ و $u_{n+1}=3-2u_n$.

$u_1=-1$ ، $u_2=5$ و $u_3=-7$.

حساب الحد u_{10} : $u_{10}=1025$

المستوى: 3 آ ف.

الكفاءة المستهدفة: تحديد إتجاه تغير متتالية حسابية أو هندسية.

سير الدرس.

نشاط:

I) $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية معرفة ب: $U_n = +\frac{1}{2}n$.

1) أحسب $U_{n+1} - U_n$ ماذا تستنتج ؟.

II) 1) (U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $U_n = -3n-2$.

- أحسب الأساس r ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية U_n.

2) (V_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $V_n = 2 \times 1^n$ ، $V_0 = 2$

- أحسب الأساس q ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية V_n.

الحل:

I) حساب $U_{n+1} - U_n$:

لدينا: $U_{n+1} - U_n = +\frac{1}{2}(n+1) - (+\frac{1}{2}n)$ أي: $U_{n+1} - U_n = +\cancel{\frac{1}{2}n} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}n}$

ومنه: $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}$

الإستنتاج: بما أن $U_{n+1} - U_n \geq 0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة.

II) 1) حساب الأساس r مع: $U_{n+1} - U_n = r$

لدينا: $U_{n+1} - U_n = -3(n+1) - 2 - (-3n-2)$ أي: $U_{n+1} - U_n = -\cancel{3n} - 3 - \cancel{2} + \cancel{3n} + \cancel{2}$

إذن: $r = -3$

إستنتاج إتجاه تغير المتتالية (U_n):

بما أن $r < 0$ فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

2) حساب الأساس q:

لدينا، $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$ أي، $\frac{2\times(1)^{n+1}}{2\times 1^n} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{1^n}\times 1}{\cancel{2}\times\cancel{1^n}}$ ومنه، $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1$

إذن: $q = 1$

إستنتاج إتجاه تغير المتتالية (V_n):

بما أن $q = 1$ فإن المتتالية (V_n) ثابتة.

2) إتجاه تغير متتالية:

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

لدراسة إتجاه تغير المتتالية (U_n) ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فيكون:

1) $U_{n+1} - U_n \geq 0$ معناه (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

2) $U_{n+1} - U_n \leq 0$ معناه (U_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3) $U_{n+1} - U_n = 0$ معناه (U_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

المتتاليات الرتيبة:

نقول أن (U_n) أنها رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

ملاحظة:

1) توجد متتاليات ليست متزايدة وليست متناقصة، نقول عنها أنها غير رتيبة مثل: $U_n=(-1)^n$.

2) تكون المتتالية (U_n) ثابتة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي K بحيث من أجل كل عدد طبيعي n، $U_n=K$.

2) إتجاه تغير متتالية حسابية:

إذا كانت (U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول U_0 وأساسها r حيث: $U_{n+1}-U_n=r$.

لدراسة إتجاه تغيرها ننظر إلى الأساس:

1) إذا كان r موجب تماما $(r>0)$ فإن المتتالية متزايدة تماما.

2) " " " سالب تماما $(r<0)$ " " متناقصة تماما.

3) " " r معدوما $(r=0)$ " " ثابتة.

3) إتجاه تغير متتالية هندسية:

في حالة (U_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$،

حدها الأول U_0 وأساسها q.

1) إذا كان $0<q<1$ و $U_0>0$ فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

2) " " $0<q<1$ و $U_0<0$ " " (U_n) متزايدة تماما.

3) " " $q>1$ و $U_0>0$ " " (U_n) متزايدة تماما.

4) " " $q>1$ و $U_0<0$ " " (U_n) متناقصة تماما.

5) " " $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.

6) " " $q=0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة إبتداءا من الحد الثاني.

7) " " $q<0$ فإن الفرق $U_{n+1}-U_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة

ومنه المتتالية ليست رتيبة.

تمارين للمراجعة: ت 1، 2، و 3 ص 37 مع الحلول.

عمل منزلي: ت ~~22~~ 24 ص 44، ت 33 و 34 ص 46.

سير الدرس .

نتيجة :

يمكن تلخيص إتجاه تغير المتتالية الهندسية في الجدول التالي :

q \ V_0	$V_0 < 0$	$V_0 = 0$	$V_0 > 0$
$0 < q < 1$	↗	ثابتة	↘
$q = 1$	ثابتة	ثابتة	ثابتة
$q > 1$	↘	ثابتة	↗

تمرين للتوسيع : BAC 2008

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_n = 3n+1$

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 .

2) أ) بين أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها .

عين إتجاه تغير (u_n) .

ب) تحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ما رتبته ؟

3) أحسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{169}$

الحل :

1) حساب u_0 ، u_1 ، u_2 :

$u_0 = 1$ ، $u_1 = 4$ ، $u_3 = 7$

2) أ) إثبات أن المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها :

لدينا : ط1) $u_{n+1} = 3(n+1)+1 = 3n+3+1 = 3n+1+3 = u_n+3$ ،

وعليه المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=3$

ط2) : $u_{n+1} - u_n = \cancel{3n}+4-\cancel{3n}-1 = 3$

تعيين إتجاه تغير (u_n) :

بما أن $q = 3 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب) التحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته :

نضع : $u_n = 2008$ ومنه : $3n+1 = 2008$ ومنه : $n = 169$

وعليه : $u_{169} = 2008$

3) حساب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{169}$

عدد الحدود $= 1+0-169 = 170$ وعليه : $S_n = \frac{170}{2}(u_0 + u_{169})$

أي : $S_n = 85(1+2008)$ ومنه $S_n = 170765$

تمرين ③ BAC 2010 :

I) (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين : $u_{10}=31$ و $u_{15}=46$

1) عين أساسها وحدها الأول u_0.

2) أكتب u_n بدلالة n.

3) أثبت أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).

4) أحسب المجموع S : $S=u_0+u_1+\dots+u_{2009}$

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n=2\times 8^n$

1) أثبت أن (v_n) متتالية هـ يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

2) أحسب بدلالة n المجموع : $S'=v_0+v_1+\dots+v_n$

الحل :

I) 1) تعيين الأساس والحد الأول u_0 :

لدينا ، $u_{15}=46$, $u_{10}=31$

نعلم أن ، $u_n=u_p+(n-p)r$ ومنه ، $u_{15}=u_{10}+5r$

ومنه ، $r=\frac{u_{15}-u_{10}}{5}=\frac{15}{5}=3$ ومنه ، $r=3$

ونعلم أن ، $u_n=u_0+nr$ ومنه : $u_{10}=u_0+(10\times 3)$

أي ، $u_0=31-30$ ومنه ، $u_0=1$

2) كتابة u_n بدلالة n ، نعلم أن ، $u_n=u_0+nr$ ومنه ، $u_n=1+3n$

3) إثبات أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) :

معناه وجود عدد طبيعي n يحقق : $u_n=6028$.

$u_n=6028$ أي ، $1+3n=6028$ وعليه : $n=2009$ أي $u_{2009}=6028$

4) حساب المجموع S ، لدينا : $S=\frac{2010}{2}(u_0+u_{2009})$

أي $S=1005(1+6028)$ ومنه $S=6059145$

II) لدينا : $v_n=2\times 8^n$

1) إثبات أن (v_n) م هـ وتعيين أساسها وحدها الأول v_0 ،

(v_n) م هـ معناه ، $v_{n+1}=q\cdot v_n$ من أجل $n\in\mathbb{N}$

ط1) $v_n=2\times 8^n$ ومنه ، $v_{n+1}=2\times 8^{n+1}=2\times 8^n\times 8=8\cdot v_n$

ومنه ، (v_n) متتالية هـ أساسها $q=8$ وحدها الأول $v_0=2$

2) حساب المجموع ، S' ، لدينا ، $S'=v_0+v_1+\dots+v_n$

$$S'=v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)=2\left(\frac{8^{n+1}-1}{8-1}\right)=2\left(\frac{8^{n+1}-1}{7}\right)$$

المستوى: 3 آف

الكفاءة المستهدفة: - إستعمال المتتاليات الحسابية والهندسية لحل مشكلات من الحياة اليومية.

سير الدرس.

نشاط 3 ص 31:

1) تعيين U_0 و V_0 ثم حساب U_1 و V_1:

لدينا: عدد سكان كل مدينة في سنة 2001 هو 6000 نسمة.

إذن، $U_0 = 6000$ ، $V_0 = 6000$

ولدينا، U_n عدد سكان المدينة A إذن: $U_1 = 6000 + 130$ ومنه $U_1 = 6130$.

" " " V_n " B إذن: $V_1 = 6000 + \frac{6000 \times 2}{100}$ أي: $V_1 = 6000(1{,}02)$

ومنه، $V_1 = 6120$

2) إيجاد علاقة بين U_{n+1} و U_n:

لدينا، $U_1 = 6000 + 130$ أي، $U_1 = U_0 + 130$

$U_2 = U_1 + 130$

$\vdots \quad \vdots$

بعد التعميم نجد: $U_{n+1} = U_n + 130$

التحقق أن المتتالية (U_n) حسابية وتعيين أساسها:

لدينا، $U_{n+1} = U_n + 130$ بما أن: $U_{n+1} - U_n = 130$ وهي من الشكل $U_{n+1} - U_n = r$ فإن المتتالية U_n حسابية وأساسها $r = 130$

3) إيجاد التعبير عن U_n بدلالة n،

لدينا، $U_n = U_0 + nr$ ومنه، $U_n = 6000 + 130n$

4) إيجاد علاقة بين V_{n+1} و V_n:

لدينا، $V_1 = 6000(1{,}02)$ أي، $V_1 = V_0(1{,}02)$

$V_2 = V_1(1{,}02)$

$V_3 = V_2(1{,}02)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

بعد التعميم نجد: $V_{n+1} = V_n(1{,}02)$ أي: $V_{n+1} = 1{,}02\, V_n$

التحقق أن المتتالية (V_n) هندسية وتعيين أساسها q:

لدينا، $V_{n+1} = 1{,}02\, V_n$ أي: $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1{,}02$ بما أن الناتج ثابت فإن المتتالية V_n هندسية أساسها $q = 1{,}02$ ،

5) التعبير عن V_n بدلالة n،

لدينا، $V_n = V_0 q^n$ ومنه، $V_n = 6000(1{,}02)^n$

(ج) المقارنة بين عددي سكان المدينتين A و B في سنة 2010 :

لدينا : حساب رتبة سنة 2010 :

لدينا : $2005 + n = 2010$ ومنه : $n = 5$

إذن : $U_5 = 6000 + 130(5)$ ومنه : $U_5 = 6650$

و $V_5 = 6000 \times (1{,}02)^5$ $V_5 = 6624{,}48$

نلاحظ أنه في سنة 2010 عدد سكان المدينة A أكبر من عدد سكان المدينة B .

نص ما ثقوسي :

شخص له رأس مال يقدر بـ : 20 000DA أراد أن يضع هذا المبلغ في بنك يعرض عليه طريقتين لوضع هذا المال :

الطريقة ① : يوضع هذا المال بفائدة بسيطة قدرها 5%

الطريقة ② : " " " " " مركبة " 2%

(أ) أحسب رصيد هذا الشخص خلال 4 سنوات بالطريقتين.

(ب) ما هي الطريقة الأفضل لمدة 4 سنوات.

(ج) في الحالة (أ) أوجد عدد السنوات حيث رأس المال يتضاعف .

المستوى: 3 آ ف.

الموضوع: دراسة المتتاليات من الشكل: $U_{n+1}=aU_n+b$

سير الدرس:

نشاط ④ ص ⑦:

أ) تعيين u_0 ثم حساب u_1 و u_2:

من المعطيات لدينا: $u_0=10000$ المبلغ المودع لدى البنك.

لدينا: $u_1=u_0+u_0\times\left(\frac{5}{100}\right)+2000$ أي: $u_1=(1{,}05)u_0+2000=\boxed{12500}$

$u_2=1{,}05\,u_1+2000=\boxed{15125}$

② التحقق أن: $U_{n+1}=1{,}05\,U_n+2000$:

لدينا: $u_1=1{,}05\,u_0+2000$

$u_2=1{,}05\,u_1+2000$

$\vdots$

بالتعميم نجد: $U_{n+1}=1{,}05\,U_n+2000$

③ تبيين أن المتتالية (U_n) ليست حسابية ولا هندسية:

لدينا: $u_1-u_0\neq u_2-u_1$ إذن (U_n) متتالية ليست حسابية.

ولدينا: $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$ إذن (U_n) ليست هندسية.

④ أ) تبيين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $1{,}05$ وتعيين حدها الأول:

لدينا: $V_n=U_n+40000$ ، $V_{n+1}=U_{n+1}+40000$ أي:

ط① $V_{n+1}=1{,}05\,U_n+42000$

وكذلك: $\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{1{,}05\,U_n+42000}{U_n+40000}=\frac{1{,}05\,(\cancel{U_n+40000})}{\cancel{U_n+40000}}=1{,}05$

ومنه: $\frac{V_{n+1}}{V_n}=1{,}05$

بما أن النسبة ثابتة فإن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q=1{,}05$

ط② لدينا: $V_{n+1}=1{,}05\,U_n+42000$ أي: $V_{n+1}=1{,}05\,(U_n+40000)$

ومنه: $V_{n+1}=1{,}05\,V_n$ ومنه: (V_n) م هندسية أساسها $q=1{,}05$

تعيين حدها الأول:

$V_0=U_0+40000$ ومنه: $V_0=50000$

ب) حساب V_n بدلالة n ثم استنتاج U_n بدلالة n:

لدينا: $V_n=V_0\times q^n$ أي: $V_n=50000\,(1{,}05)^n$

إذن: $U_n=V_n-40000$

ومنه: $U_n=50000\,(1{,}05)^n-40000$

ج) رصيد نبيل في سنة 2010:

رتبة 2010، لدينا: $2010=2000+n$ ومنه $n=10$

إذن: $U_{10}=50000\,(1{,}05)^{10}-40000$ ومنه: $U_{10}=41444{,}73$

[illegible]

سير الدرس.

* المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=aU_n+b$:

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول U_1 وبالعلاقة $U_{n+1}=aU_n+b$

حيث: $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

1) الحالة الأولى $a=1$:

$\boxed{\text{تكون المتتالية } (U_n) \text{ حسابية وأساسها } b.}$

مثال 1

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $U_1=1$ و $U_{n+1}=U_n-2$

1) من الواضح أن المتتالية (U_n) حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $U_1=1$

2) لدينا، $U_n=U_1+(n-1)r$ ومنه $U_n=U_1+(n-1)(-2)$ أي $V_n=1-2n+2$

ومنه، $V_n=3-2n$

~~الحالة الثانية $a\neq 1$ و~~

3) من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $S_n=U_1+U_2+\dots+U_n=n\left(\frac{U_1+U_n}{2}\right)$

ومنه، $S_n=\frac{n(4-2n)}{2}$ ومنه، $S_n=n(2-n)$

2) الحالة الثانية $a\neq 1$ و $U_0=\frac{b}{1-a}$ ؛

مثال 2

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $U_1=-2$ و $U_{n+1}=2U_n+2$

1) حساب الحدود الأولى يعطينا: $U_2=-2$ و $U_3=-2$، ....

نخمن أن المتتالية (U_n) ثابتة.

3) الحالة الثالثة $a\neq 1$ و $U_0\neq\frac{b}{1-a}$ ؛

لحساب الحد العام U_n والمجموع $S_n=U_1+U_2+\dots+U_n$ نستعين بالمتتالية ذات الحد العام $V_n=U_n-\frac{b}{1-a}$

مثال 3

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $U_1=3$ و $U_{n+1}=2U_n+3$

ولتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام: $V_n=U_n+3$

1) لدينا: $V_{n+1}=U_{n+1}+3=2U_n+3+3=2U_n+6=2(U_n+3)=2V_n$

إذن، $V_{n+1}=2V_n$ نستنتج أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q=2$

وحدها الأول: $V_1=6$.

2) لدينا عبارة الحد العام لـ (V_n) هي، $V_n=V_1\times q^{n-1}=6\times 2^{n-1}$

ونستنتج أن عبارة (U_n) هي: $U_n=V_n-3=6\times 2^{n-1}-3$

3) لدينا $S_n=V_1+V_2+\dots+V_n=-6(1-2^n)$ و $S'_n=U_1+U_2+\dots+U_n=-6(1-2^n)-3n$

المستوى: 3 آف.

سير الدرس

حل التمرين 34 ص (46):

لدينا: $U_n = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$

1) لنبين أن (U_n) متتالية حسابية وتعيين حدها الأول U_1 وأساسها r:

لدينا: $U_{n+1} - U_n = r$

ب1)
$$U_{n+1} - U_n = -\frac{2}{5}(n+1) + \frac{5}{4} - \left(-\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}\right)$$
$$= -\cancel{\frac{2}{5}n} - \frac{2}{5} + \cancel{\frac{5}{4}} + \cancel{\frac{2}{5}n} - \cancel{\frac{5}{4}}$$
$$= -\frac{2}{5}$$

بما أن الفرق عدد ثابت فإن المتتالية (U_n) حسابية أساسها $r = -\frac{2}{5}$

وحدها الأول: $U_1 = -\frac{2}{5} + \frac{5}{4} = \frac{17}{20}$

ط2) لدينا:
$$U_{n+1} = U_n + r \qquad U_{n+1} = -\frac{2}{5}n - \frac{2}{5} + \frac{5}{4} = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$$
$$U_{n+1} = U_n - \frac{2}{3}$$

إذن (U_n) م ح أساسها $r = -\frac{2}{3}$

*استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n):

بما أن $r < 0$ فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

2) حساب بدلالة n المجموع:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

لدينا: $S_n = n\left(\frac{U_1 + U_n}{2}\right)$ أي $S_n = n\left(\frac{\frac{17}{20} - \frac{2}{5}n + \frac{5}{4}}{2}\right)$

أي $S_n = n\left(\frac{\frac{21}{10} - \frac{2}{5}n}{2}\right)$ ومنه: $S_n = \frac{n}{2}\left(\frac{21}{10} - \frac{2}{5}n\right)$

3) تعيين العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 1$

لدينا: $S_n = 1 \Rightarrow \frac{n}{2}\left(\frac{21}{10} - \frac{2}{5}n\right) = 1$

$$\frac{21}{10} - \frac{2}{5}n = \frac{1}{\frac{n}{2}} \qquad \text{أي} \qquad \frac{21}{10} - \frac{2}{5}n = \frac{2}{n}$$

$$\frac{21}{20}n - \frac{1}{5}n^2 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{5}n^2 + \frac{21}{20}n - 1 = 0$$

المحور: الدوال العددية.   المستوى: 3 آف.

الموضوع: تذكير حول المعادلات والمتراجحات.

سير الدرس.

تمرين ط ٨ ص 50: الجزء ②.

لدينا: $f(x) = x^2 + x - 2$.

① حساب صور الأعداد الحقيقية -3، -1 و 0:

صورة -3 هي: $f(-3) = (-3)^2 - 3 - 2 = 4$ ومنه، $f(-3) = 4$.

صورة -1 هي: $f(-1) = (-1)^2 - 1 - 2 = -2$، ومنه، $f(-1) = -2$

صورة 0 هي: $f(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2$ ومنه، $f(0) = -2$.

② حل المعادلة $f(x) = -2$:

لدينا: $x^2 + x - 2 = -2$ أي: $x^2 + x = 0$ أي: $x(x+1) = 0$

أي: $x+1=0$ أو $x=0$ ومنه للمعادلة حلين هما $x=-1$ و $x=0$.

③ تبيين أن $f(x) = (x-1)(x+2)$:

لدينا، $f(x) = x^2 - x + 2x - 2$ ومنه، $f(x) = x^2 + x - 2$

④ حل المعادلة $x^2 + x - 2 = 0$:

لدينا، $x^2 + x - 2 = 0$ أي: $(x-1)(x+2) = 0$ أي: $x+2=0$ أو $x-1=0$

أي: $x = -2$ أو $x = 1$ إذن للمعادلة حلان هما، $x=-2$ و $x = 1$.

⑤ تحديد في جدول حسب قيم x إشارة $f(x)$:

لدينا، $f(x) = (x-1)(x+2)$

قيم x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
إشارة $(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
إشارة $(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
إشارة $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

⑥ إيجاد حلول المتراجحة $x^2 + x - 2 > 0$:

نستنتج من جدول إشارة $f(x)$ أن حلول المتراجحة هي:

$S =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$

* تذكير حول المعادلات والمتراجحات، أنظر المطبوعة.

أنشطة تقويمية:

تمرين ①: أدرس حسب قيم x إشارة الدوال الآتية:

$f(x) = -2x + 4$، $g(x) = 2x - 5$، $h(x) = +2x^2 + x + 2$،

$t(x) = x^2 - 4x + 4$، $K(x) = -2x^2 + 3x - 1$

سير الدرس.

الحل: دراسة إشارة الدوال التالية:

① الدالة $f(x)=-2x+5$:

لدينا: $-2x+5=0$ تعني $-2x=-5$ ومنه $x=\frac{5}{2}$

$-2x+5$ هو من الشكل $ax+b$ و $a=-2$ وبما أن: $a<0$ فإن:

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
إشارة $-2x+5$		+	0	−	

② الدالة $g(x)=2x-5$:

لدينا: $x=\frac{5}{2}$ ، $a>0$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
إشارة $2x-5$		−	0	+	

③ الدالة $h(x)=2x^2+x+2$:

لدينا: $\Delta=-7$ ومنه ليس للمعادلة حلول إذن إشارة المعادلة هي من إشارة a إذن بما أن $a>0$ فإن:

x	$-\infty$		$+\infty$
إشارة $2x^2+x+2$		+	

④ الدالة $t(x)=x^2-4x+4$

لدينا: $\Delta=0$ للمعادلة حل مضاعف

$x_0=\frac{-b}{2a}$ ومنه: $x_0=2$

⑤ الدالة $K(x)=-2x^2+3x-1$:

لدينا: $\Delta=1$ إذن للمعادلة حلان مختلفان هما:

$$x_1=\frac{-3-1}{2\times(-2)}=1$$

$$x_2=\frac{-3+1}{-4}=\frac{1}{2}$$

بما أن $a<0$ ،

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$K(x)$		−	0	+	0	−	

تمرين 9 ص 68: منحنى الدالة f هو المنحنى رقم ①.

تمرين 10 ص 68: جدول تغيرات الدالة f هو الجدول رقم ②.

تمارين للواجب: ① و ② ص 63

عمل منزلي: ت 4 و 5 ص 60.

التمرين 4 ص 60:

① إشارة الدالة f : موجبة على المجال $]-\infty,1]$ وسالبة على المجال $[1,+\infty[$

② 〃 〃 g : سالبة على المجال $]-\infty,-2]$ و ~~...~~ موجبة 〃 〃 $[-2,+\infty[$

③ 〃 〃 h : موجبة على المجال $]-\infty,2]$ وسالبة على المجال $[2,+\infty[$

④ 〃 〃 k : موجبة $]-\infty,1]$ وسالبة على $[1,+\infty[$.

الموضوع : (تذكير حول المعادلات والمتراجحات)	الموسم الدراسي : 2014/2013

↲ **نشاط :** **تذكير حول المعادلات و المتراجحات :**

1. إشارة $ax+b$:

مبرهنة : a ، b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
إشارة $ax+b$		عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

ملاحظة : يؤول حل متراجحة من الشكل $ax+b \leq 0$ $(ax+b \geq 0)$ إلى دراسة إشارة $ax+b$.

2. إشارة ax^2+bx+c :

a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

لدراسة إشارة ax^2+bx+c نميز ثلاث حالات

و ذلك حسب إشارة المميز Δ حيث $\Delta = b^2-4ac$.

الحالة الأولى : $\Delta < 0$

ليس للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذورا و لدينا:

x	$-\infty$		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c		نفس إشارة a	

الحالة الثانية : $\Delta = 0$

للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ حلاً مضاعفا $x_0 = -\frac{b}{2a}$ و لدينا :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	نفس إشارة a	

الحالة الثالثة : $\Delta > 0$

للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ حلاّن مختلفان $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و لدينا بفرض $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c		ن إشارة a	0	عكس إشارة a	0	ن إشارة a	

ملاحظة :

1. يؤول حل متراجحة من الشكل $ax^2+bx+c \leq 0$ $(ax^2+bx+c \geq 0)$ إلى دراسة إشارة ax^2+bx+c.
2. لدراسة إشارة ax^2+bx+c نتبع الخطوات التالية :

- نحسب المميز Δ ثم ندرس إشارته

الكفاءات المستهدفة : - العمليات على الدوال المشتقة — معادلة المماس .
المستوى : 3 آداب وفلسفة الموسم الدراسي : 2014/2013

ـــ نشــاط : تذكير حول المشتقات :

1. الدوال المشتقة لدوال مألوفة :

a ، b و k أعداد حقيقية. f دالة و f' دالتها المشتقة .

$f(x)$	k	$ax+b$	x^2	($n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$) x^n	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	0	a	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$
مجالات قابلية الاشتقاق	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

أمثلة :

- الدالة $x \mapsto 5x+4$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto 5$.
- الدالة $x \mapsto x^3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto 3x^2$.

2. العمليات على الدوال المشتقة :

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. k عدد حقيقي .

الدالة	$f+g$	kf	fg	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
قابلة للاشتقاق على	I	I	I	I باستثناء قيم x حيث $g(x)=0$	
دالتها المشتقة هي	$f'+g'$	kf'	$f'g+g'f$	$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$

3. معادلة المماس :

نتيجة : f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم.
إذا قبلت f الاشتقاق عند a من I فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$
مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $f(x)=x^2+3$.
معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي :
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$
لدينا $f(1)=4$ و $f'(1)=2$ نجد بعد التعويض : $y=2x+2$.

الكفاءات المستهدفة : ـ العمليات على الدوال المشتقة .
ـ معادلة المماس .

المستوى : 3 آ ف

سير الدرس .

نشاط :

عين الدالة المشتقة f' للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=r$ ، $f(x)=x$ ، $f(x)=2x+1$ ، $f(x)=3x^2$ ، $f(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$

الحل :

1) الدالة f $f(x)=r$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والدالة المشتقة هي : $f'(x)=0$.

2) " $f(x)=x$ " " " " " " " : $f'(x)=1$

3) " $f(x)=-2x+1$ " " " " " " " : $f'(x)=-2$

4) " $f(x)=3x^2$ " " " " " " " : $f'(x)=6x$

5) " $f(x)=\frac{1}{x}$ " " " " " " " : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

1ـ الدوال المشتقة لدوال مألوفة :

أمثلة :

2ـ العمليات على الدوال المشتقة :   " أنظر المطبوعة " .

3ـ معادلة المماس :

مثال .

أنشطة تقويمية :

تمرين 11 ص 68 :

تعيين الدالة المشتقة في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=5-2x$: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والدالة المشتقة هي $f'(x)=-2$

2) $f(x)=-2x^2+3x-10$: " f " " " " " " " : $f'(x)=-4x+3$

3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+1$: " f " " " " " " " : $f'(x)=x^2+3x-1$

تمرين 12 ص 68 :

تعيين الدالة المشتقة للدالة f في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ والدالة المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-1(2x)}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{2x}+2-\cancel{2x}}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

2) $f(x)=\frac{-x+1}{x}$: " f " " " $\mathbb{R}-\{0\}$ والدالة المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{-1(x)-1(-x+1)}{x^2}=\frac{\cancel{-x}+\cancel{x}-1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

المستوى : 3 آف .

سير الدرس .

③ $f(x)=\frac{4x+r}{4x-r}$: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{\frac{5}{4}\}$ والدالة المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{4(4x-r)-4(4x+r)}{(4x-r)^2}=\frac{\cancel{16x}-20-\cancel{16x}-20}{(4x-r)^2}$$

ومنه : $f'(x)=\frac{-40}{(4x-r)^2}$

④ $f(x)=(2x+1)(x^2+3x-1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والدالة المشتقة هي :

$$f'(x)=2(x^2+3x-1)+(2x+3)(2x+1)=2x^2+6x-2+4x^2+6x+2x+3$$

ومنه : $f'(x)=6x^2+14x+1$

تمرين ③ :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2-2x$.

① عين معامل التوجيه لمماس المنحنى عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

② أكتب معادلة المماس للمنحنى (C) " " " " -1 .

الحل :

① تعيين معامل التوجيه :

لدينا : $f'(x)=2x-2$ إذن : $f'(-1)=2(-1)-2$ ومنه $f'(-1)=-4$

إذن معامل التوجيه لمماس المنحنى عند $x=-1$ هو -4 .

② كتابة معادلة المماس :

لدينا : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ، $f'(-1)=-4$ ، $f(-1)=3$

أي : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي : $y=-4(x+1)+3$

أي : $y=-4x-4+3$ ومنه : $y=-4x-1$

تمارين للمراجعة : ت ١، ٢ ص 55 . مع الحلول

عمل منزلي : ت 83، 84 و 18 ص 62 .

ت 26 ص 63 .

الكفاءة المستهدفة: تعيين إتجاه التغير باستعمال إشارة الدالة المشتقة. المستوى: 3 آف.

سير الدرس.

نشاط ② ص 51:

① تحديد حسب قيم x إتجاه تغير الدالة:

* الدالة f متزايدة تماما لما: $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$
* الدالة f متناقصة تماما لما: $x \in [-1,1]$

② تعيين $f(-2)$ ، $f(2)$ ، $f(-1)$ و $f(1)$:

بقراءة بيانية نجد: $f(-2)=0$ ، $f(2)=4$ ، $f(-1)=4$ ، $f(1)=0$.

③ تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

④ تعيين معادلة المماس (D):

لدينا: $y = ax + b$

بقراءة بيانية نستنتج من المستقيم (D)

أن: $b=2$ ، $a=-3$ إذن: $y=-3x+2$ هي معادلة مماس لـ (D).

⑤ تعيين معادلة مماس من المنحنى (C_f) عند -1 و 1: نلاحظ

ونستنتج من التمثيل البياني أن معادلة مماس للمنحنى (C_f) عند -1: هي: $y=4$

وعند الفاصلة 1 هي: $y=0$

تحديد ميل كل من المماسين:

نلاحظ أن $y=4$ و $y=0$ فإن ميل كل من المماسين هو 0.

⑥ تعيين التمثيل البياني للدالة f' مع التبرير.

التمثيل البياني للدالة f' هو ③

التبرير:

نلاحظ من جدول التغيرات أن إشارة $f'(x)$ موجبة لما: $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$

وسالبة لما: $x \in [-1,1]$ وهذا يتحقق في التمثيل ③.

* **تعيين إتجاه تغير دالة باستعمال إشارة الدالة المشتقة:**

مبرهنة:

f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

① إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

② " " " " " x " I، $f'(x)<0$ " " f متناقصة تماما على I.

③ " " " " " x " I، $f'(x)=0$ " " f ثابتة على I.

ملاحظات:

① تبقى المبرهنة صحيحة في الحالتين الأولى والثانية إذا إنعدمت $f'(x)$ من أجل عدد منته من قيم x.

② دراسة إتجاه تغير دالة يعني تعيين المجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة تماما، متناقصة تماما أو ثابتة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-4,4]$ ب: $f(x)=2x^2-4x+2$

- أدرس إتجاه تغير الدالة f.

الحل:

دراسة إتجاه تغير الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-4;4]$ والدالة المشتقة $f'(x)=4x-4$.

إشارة $f'(x)$:

$f'(x)=0$ أي: $4x-4=0$ يعني $4x=4$ ومنه $x=1$

إذن إشارة $f'(x)$ هي كالتالي:

x	-4		1		4
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-4,1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1,4]$

نشاط تقويمي:

باستعمال المشتقة، أدرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات التالية: ① $f(x)=1-2x^2$ ② $f(x)=(x-1)(x+3)$

③ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+1$

الحل:

① $f(x)=1-2x^2$ ؛ $f'(x)=-4x$ ، $-4x=0$ أي: $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0,+\infty[$

② $f(x)=(x-1)(x+3)$ ، $f'(x)=2x+2$ ، $2x+2=0$ أي $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1,+\infty[$.

③ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+1$ ، $f'(x)=x^2+3x-4$ ، $x_1=-4$ ، $x_2=1$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty,-4]\cup[1,+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-4,1]$

تمارين للإنجاز: 3 ص 32 مطلوب. حل منزلي: 30، 31 و 33 ص 63.

إستعد للبكالوريا: ص 28 و 29.

المحتوى المعرفي: الدراسة والتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر. المستوى: 3 آف.

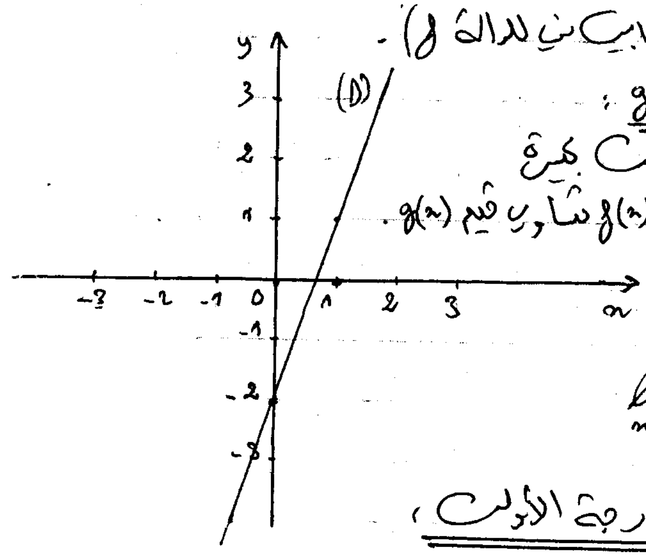
الكفاءة المستهدفة: الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى.

سير الدرس.

نشاط 1 ص 68:

لدينا: $f(x)=3x-2$ ، $g(x)=3x$.

1) رسم المنحنى (Δ) : (التمثيل البياني للدالة f).



3) المقارنة بين قيم $f(x)$ و قيم $g(x)$:

لما يأخذ x (على الترتيب $-x$) قيم كبيرة بالقدر الكافي (أي أن)، فإن: قيم $f(x)$ تساوي قيم $g(x)$.

4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

4)

* **الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى:**

1) دراسة مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=-2x+1$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) النهايات: 1) أدرس نهايات f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. 2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل ج ت 3) أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f.

لدينا: حسب النتيجة الأولى، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f:

أ) المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=-2$

ب) إشارة المشتقة:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3) التمثيل البياني:

* التقاطع مع المحورين:

أ) مع محور الفواصل:

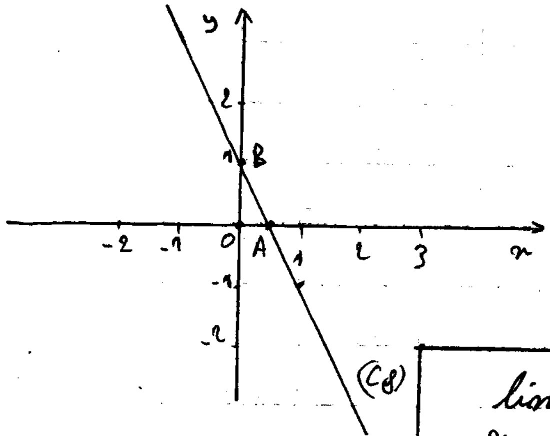
نضع $y=0$ أي: $f(x)=0$

يعني $-2x+1=0$ أي: $x=\frac{1}{2}$. ومنه: $(C_f)\cap(xx')=\{A(\frac{1}{2},0)\}$

ب) مع محور التراتيب:

المستوى : 3آف .

سير الدرس .



③ نتائج :

① التمثيل البياني للدالة $f: x \mapsto ax+b$

هو المستقيم الذي معادلته $y = ax+b$

ولتمثيله يكفي رسم نقطتين منه .

② النهايات : نقبل بصفة مؤقتة :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(ax+b) = \lim_{x\to+\infty}(ax) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}(ax+b) = \lim_{x\to-\infty}(ax)}$$

نستنتج هكذا أنه : ① إذا كان $a>0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}(ax+b) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax+b) = +\infty$

② إذا كان $a<0$ فإن : $\lim_{x\to-\infty}(ax+b) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax+b) = -\infty$

نشاط تقويمي :

① $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}x-1\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2}x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}x-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x = +\infty$

② $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x-2\right) = \lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x-2\right) = \lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}x = -\infty$

تمارين تدريبية : ت 1 و 2 ص 71 مع الحلول .

عمل منزلي : 1 ، 2 ، 3 ، 4 و 5 ص 90 .

الكفاءة المستهدفة: الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية. المستوى: 3 آف.

سير الدرس.

ت ط ① ص (68):

لدينا: $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ و $g(x) = 2x^2$

① تعيين فواصل تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل:

نضع: $y = 0$ أي: $f(x) = 0$ أي: $2x^2 - 4x - 6 = 0$

لدينا: $\Delta = 64$ ، $\sqrt{\Delta} = 8$. للمعادلة حليت مختلفين: $x_1 = 3$ ، $x_2 = -1$

إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{A(3,0), B(-1,0)\}$

② حساب نهايات الدالتين f و g عن $\mathbb{R}$:

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2) = \boxed{+\infty}$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$

③ تخمين علاقة بين $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ ثم بين $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

* الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية:

① دراسة مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

③ عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

④ أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2.

⑤ أرسم في معلم متعامد المنحنى (C_f) الممثل للدالة f والمماس (Δ).

الحل:

① النهايات:

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$

② دراسة إتجاه تغير الدالة f:

سير الدرس .

1) المشتقة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f'(x)=6x-6$

ب) إشارة المشتقة :

لدينا ، $f'(x)=0$ أي ، $6x-6=0$ أي $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $6x-6$		$-$	0	$+$	

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$.

*** جدول التغيرات :**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) تعيين نقط التقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات :

1) مع محور الفواصل :

نضع $y=0$ أي ، $f(x)=0$ يعني $3x^2-6x+3=0$ أي $x=1$

ومنه : $(C_f)\cap(xx')=\{A(1,0)\}$ أي أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 1 .

2) مع محور التراتيب :

نضع $x=0$ نجد : $f(0)=3$ ومنه : $(C_f)\cap(yy')=\{B(0,3)\}$

أي أن (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها 3 .

4) معادلة المماس :

معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2 هي :

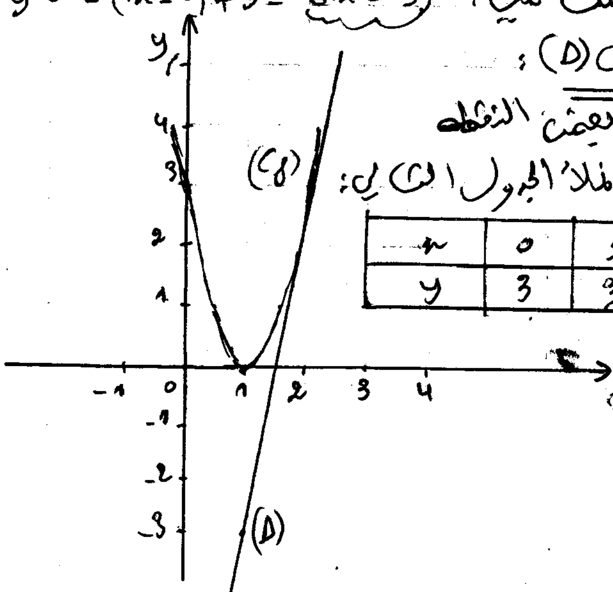
$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ ولدينا : $f'(2)=6$ و $f(2)=3$

وبالتالي معادلة المماس هي : $y=6(x-2)+3=6x-9$

5) رسم المنحنى (C_f) والمماس (D) :

لرسم المنحنى (C_f) نستعين ببعض النقط المساعدة ومن أجل ذلك نملأ الجدول التالي :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2		
y	3	$\frac{3}{4}$	0	3		



جدول خاص بـ (D) :

x	1	2
y	-3	3

المستوى : 3 آف

سير الدرس

① نتائج :

② التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ مع $(a\neq 0)$ يسمى قطعا مكافئا.

③ النهايات : نقبل بصفة عامة أن :

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to -\infty}(ax^2) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to +\infty}(ax^2)}$$

تمارين تدريبية : ص 72 و ت 1) ص 73 مع الحلول.

عمل منزلي : تمارين 7، 8) ص 81 (26، 28 و 29) ص 82.

المستوى: 3آف

الكفاءات المستهدفة: - دراسة الدالة كثير حدود من الدرجة ③.
- تعيين نقط الانعطاف لمنحنى.

سير الدرس

نشاط ③ ص 69:

③ المقارنة بين قيم $f(x)$ وقيم $g(x)$:
لما يأخذ x (على الترتيب $-x$) قيم كبيرة بالقدر الكافي فإن قيم $f(x)$ تكون تساوي قيم $g(x)$.

④ تعيين علاقة بين $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$:
لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3) = \boxed{+\infty}$ ، $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$
إذن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x)$

تعيين علاقة بين $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} g(x)$:
لدينا: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim (x^3) = \boxed{-\infty}$ ، $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$
إذن: $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

⑤ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:
المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:
$$f'(x) = 3x^2 + 1$$
إشارة المشتقة: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

* جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

⑥ التحقق أن: $f(x) = (x-1)(x^2+x+2)$:
لدينا: $f(x) = (x-1)(x^2+x+2)$
$$f(x) = x^3 + \cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} - x - 2$$
$$f(x) = x^3 + x - 2$$
ومنه: $f(x) = (x-1)(x^2+x+2)$

استنتاج فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f):
نضع: $y = 0$ أي $f(x) = 0$ معناه $(x-1)(x^2+x+2) = 0$ ----- ①
وعليه: $\begin{cases} x-1 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2+x+2 = 0 \text{ --- ②} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x = 1 \\ x^2+x+2 = 0 \text{ -- ②} \end{cases}$

حل المعادلة ②: بما أن $\Delta = -7$ ، $\Delta < 0$ فإن المعادلة ② لا تقبل حلول
إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{A(1,0)\}$

سير الدرس

7) أ) تبيين أن معادلة المماس لـ (C_f) هي $y=x-2$:

لدينا : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ أي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي : $y=1(x)-2$ ومنه : $y=x-2$

ب) دراسة إشارة الفرق $[f(x)-(x-2)]$:

لدينا : $[f(x)-(x-2)] = x^3+\cancel{x}-\cancel{2}-\cancel{x}+\cancel{2} = x^3$

ولدينا : $x^3=0$ أي $x=0$.

8) استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لمماسه (D) :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$[f(x)-(x-2)]$	$-$ 0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)

المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (D) على المجال $]0,+\infty[$.

ويقع تحت المماس (D) على المجال $]-\infty,0[$.

ملاحظة : المنحنى (C_f) يشترك مع مماسه في النقطة التي فاصلتها 0

تسمى هذه النقطة نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

9) حساب $f''(x)$:

الدالة $f'(x)$ قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي ، $f''(x)=6x$

10) تحديد إشارة $f''(x)$:

لدينا : $f''(x)=0$ أي : $6x=0$ ومنه : $x=0$

الاستنتاج والملاحظة :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f''(x)$	$-$ 0	$+$

نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم من أجل $x=0$ وتغير إشارتها من أجل

$x=0$ فإن المنحنى الممثل للدالة f يقبل نقطة إنعطاف

عند النقطة $A(0;f(0))$ أي : $A(0,-2)$

سير الدرس .

1) دراسة مثال:

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^3+3x-2$

ولتكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = -(x-1)^2(x+2)$
4) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.
5) أرسم في معلم متعامد المنحنى (C_f) الممثل للدالة f.

الحل:

1) دراسة نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \boxed{+\infty}$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = \boxed{-\infty}$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f:

أ) المشتقة:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = -3x^2+3 = -3(x^2-1)$$

ب) إشارة المشتقة:

لدينا: $f'(x) = 0$ أي $-3(x^2-1) = 0$ أي $x^2-1=0$ أي: $x^2 = 1$

ومنه للمعادلة حلين هما: 1 و -1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

* جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3) التحقق أن: $f(x) = -(x-1)^2(x+2)$:

$$-(x-1)^2(x+2) = -(x^2-2x+1)(x+2)$$
$$= (-x^2+2x-1)(x+2)$$
$$= -x^3+\cancel{2x^2}-x-\cancel{2x^2}+4x-2$$
$$= -x^3+3x-2 = f(x)$$

إذن: $f(x) = -(x-1)^2(x+2)$

④ تعيين نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات :

أ) مع محور الفواصل :

نضع $y=0$ أي $-(x-1)^2(x+2)=0$ يعني: $x+2=0$ أو $x-1=0$ ومنه: $x=1$ أو $x=-2$

إذن : $(C_f)\cap(xx')=\{A(1,0),B(-2,0)\}$

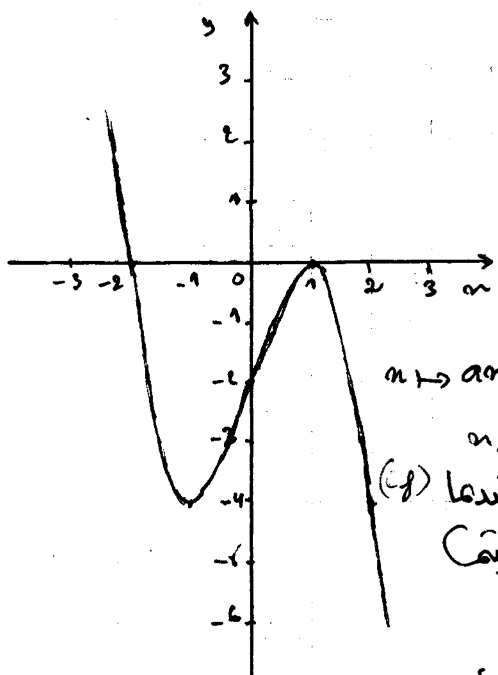
ب) مع محور التراتيب :

نضع $x=0$ نجد: $f(0)=-2$ ومنه : $(C_f)\cap(yy')=\{C(0,-2)\}$.

5) رسم المنحني (C_f) :

جدول مساعد .

x	-2	-1	0	1	2
y	0	-4	-2	0	-4



② نتائج :

① التمثيل البياني للدالة $x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0 بحيث أن x_0 هي القيمة التي تنعدم عندها المشتقة الثانية f'' للدالة f مغيرة إشارتها حول هذه النقطة .

② النهايات : نقبل بصفة عامة أن :

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to+\infty}(ax^3),\quad \lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to-\infty}(ax^3)$$

③ نقطة الإنعطاف :

تعريف ① :

نسمي نقطة إنعطاف لمنحني (C_f) ممثل لدالة f كل نقطة من (C_f) يخترق فيها (C_f) مماسه عندها .

تعريف ② :

نسمي المشتقة الثانية لدالة ونرمز إليها بالرمز f'' الدالة المشتقة لدالة f' أي : $[f''=(f')']$

نشاط تقويمي : أحسب من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، نهاية و $f''(x)$ ثم إشارة $f''(x)$ للدوال التالية : $f(x)=x^3+\frac{19}{2}x^2+\frac{11}{2}x-3$ ، $g(x)=x^3-3x^2-7x+4$ ، $h(x)=-x^3+3x$.

تمارين تدريبية : 75 ، 76 + إستعد للبكالوريا ص 78 .

موضوع مع إرشادات صفحة 79 .

عمل منزلي : ت 75 ، 76 ، 36 ، 37 ص 81 .

المستوى: 3 آف

الكفاءة المستهدفة: الربط بين جدول التغيرات والمنحنى البياني الممثل للدالة.

سير الدرس:

① من جدول التغيرات إلى التمثيل البياني:

نشاط ص 25:

① تعيين المنحنى (C_f) الممثل للدالة f:

من جدول التغيرات لدينا: $f(-2)=-3$ إذن التمثيل البياني هو رقم ①.

② أ) استنتاج من جدول التغيرات معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول b:

لدينا: $f'(x)=0$ أي: $2x+b=0$ ،

ب) حساب العدد b ثم استنتاج عبارة $f(x)$:

من جدول التغيرات لدينا: $f(-1)=-4$ نجد بالتعويض في عبارة $f(x)$ أن:

$(-1)^2+b(-1)-3=-4$ أي: $-b=3-4-1$ ومنه: $b=2$

ومنه عبارة $f(x)$ هي: $f(x)=x^2+2x-3$

③ حساب $f'(x)$ ثم دراسة إشارتها على المجال $[-2,2]$:

من أجل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=2x+2$

دراسة إشارة $f'(x)$: لدينا: $2x+2=0$ ومنه $x=-1$

الدالة المشتقة موجبة على المجال $[-1,2]$ وسالبة على المجال $[-2,-1]$.

x	-2		-1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

مقارنة النتائج مع تلك الواردة في جدول التغيرات:

النتائج الواردة في الجدول والنتائج المستنتجة هي نفسها.

④ التحقق أن النقطة $A(1,0)$ تنتمي إلى (C_f):

لدينا: $f(1)=0$ إذن النقطة $A(1,0)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f).

⑤ كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A:

أي عند الفاصلة 1 إذن: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=4(x-1)+0$

ومنه: $y=4x-4$

⑥ تحديد بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ في المجال $[-2,2]$:

هي حل واحد.

تحديدها جبريا:

لدينا: $f(x)=1$ يعني: $x^2+2x-3=1$ ومنه $x^2+2x-4=0$ ،

نحسب المميز فنجد أن: $\Delta=20$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما: $x_1=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}$ (مرفوض لأن $x_1\notin[-2,2]$)

$x_2=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}$ (مقبول لأن $x_2\in[-2,2]$).

سير الدرس .

7) إنشاء التمثيل البياني للدالة g :

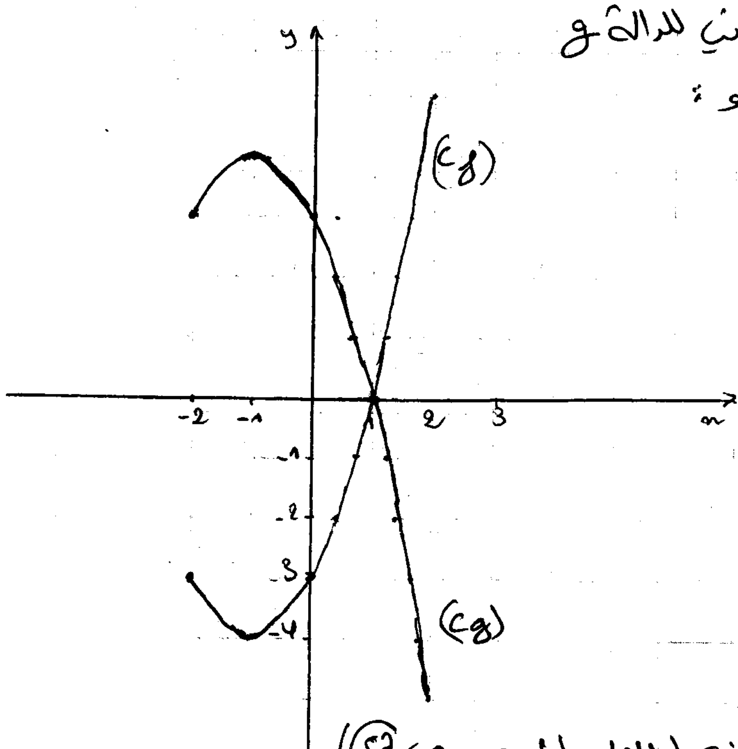
المعرفة على المجال $[-2,2]$ حيث : $g(x) = -f(x)$.

الدالتان متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل لأن لهما نفس الفاصلة

وترتيبين متعاكسين .

إذن التمثيل البياني للدالة g

على المجال $[-2,2]$ هو :



عمل منزلي : التمرين (الحل الموجه ص 57).

ت 34 و 37 ص 64 .

تمرين رقم 08 من السلسلة .

المستوى: 3 آف.

الكفاءة المستهدفة: الربط بين التمثيل البياني وجدول التغيرات.

سير الدرس.

② من التمثيل البياني إلى جدول التغيرات:

نشاط الأعمال الموجهة ص 47 :

1) تعيين جدول تغيرات الدالة f :

من التمثيل البياني نستنتج أن جدول تغيرات الدالة f هو الجدول رقم (3).

لأن: الدالة f متزايدة تماما على $[-3,-2]\cup[0,1]$ ومتناقصة على $[-2,0]$.

و $f(-3)=0$

② لدينا: $f(x)=x^3+bx^2+c$.

* تعيين بقراءة بيانية $f(0)$ و $f(1)$:

$f(0)=0$ و $f(1)=4$.

* استنتاج أن $f(x)=x^3+3x^2$: حساب العدد b :

لدينا: $f'(-2)=0$ ، $f'(x)=3x^2+2bx$

إذن: $f'(-2)=3(-2)^2+2b(-2)=0$ أي: $12-4b=0$ أي $-4b=-12$

ومنه $b=3$

حساب العدد c :

لدينا: $f(0)=0$ أي: $0^3+b(0)^2+c=0$ ومنه $c=0$.

بتعويض b و c في الدالة f نجد: $f(x)=x^3+3x^2$

③ أ) حساب $f'(x)$ ثم دراسة إشارة $f'(x)$: المشتقة $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-3,1]$ والدالة المشتقة هي $f'(x)=3x^2+6x$

* دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا، $f'(x)=0$ أي: $3x^2+6x=0$ أي: $x(3x+6)=0$

معناه: $x=0$ أو $3x+6=0$ أي: $x=0$ أو $x=-\frac{6}{3}$ ومنه، $x=0$ أو $x=-2$

إذن:

x	-3		-2		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب) تحديد اتجاه تغير الدالة f والمقارنة مع جدول التغيرات أعلاه:

الدالة f متزايدة على $[-3,-2]\cup[0,1]$ ومتناقصة على $[-2,0]$

المقارنة، نلاحظ أن اتجاه تغير الدالة f نفسه الموجود في الجدول رقم (3).

سير الدرس.

4) تعيين معادلة للمستقيم (D) عند النقطة التي فاصلتها 0 :

لدينا : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 0(x-0) + 0$

ومنه : $y = 0$

5) رسم المنحنى (C_f) ثم رسم المماس (D) :

المماس (D) ينطبق على محور الفواصل.

عمل منزلي :

التمرين رقم 5 في السلسلة (BAC 2011).

التمرين رقم 2 " " (BAC 2008).

الكفاءات المستهدفة : - استعمال التمثيل البياني لدالة لحل معادلات ومتراجحات
- مناقشة معادلة بيانيا .

المستوى : 3 آف

سير الدرس

نشاط 1 ص 59 : الجزء الأول .

+ سؤال إضافي :

7 - ناقش بيانيا ، من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[-3,4]$ ، عدد حلول وإشارتها عند المعادلة $f(x)=m$. علما أن : $f(-\frac{1}{2})=-\frac{9}{4}$.

مناقشة النشاط :

باستعمال التمثيل البياني للدالة f نجد :

1) تعيين صور الأعداد الحقيقية -3 ، -1 و 0 :

لدينا : $f(0)=-2$ ، $f(-1)=-2$ ، $f(-3)=4$.

2) حل المعادلة $f(x)=-2$:

المعادلة حلين حل معدوم والآخر سالب هما : $x_1=0$ و $x_2=-1$.

3) حل المتراجحة $f(x)>-2$:

مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>-2$ هي : $S=[-3,-1[\cup]0,2]$

4) حل المعادلة $x^2+x-2=0$:

للمعادلة $x^2+x-2=0$ حلين متمايزين هما : $x_1=-2$ و $x_2=1$

5) حل المتراجحة $x^2+x-2\leq 0$:

مجموعة حلول المتراجحة $x^2+x-2\leq 0$ هي : $S=[-2,1]$

6) تحديد في جدول إشارة $f(x)$:

x	-3		-2		1		2
إشارة $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7) المناقشة البيانية حسب قيم m للمعادلة $f(x)=m$:

1) لما : $x\in[-3;-\frac{9}{4}[$ المعادلة $f(x)=m$ لا تقبل حلول .

2) لما : $x=-\frac{9}{4}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالب .

3) لما : $x\in]-\frac{9}{4},-2[$ المعادلة تقبل حلين سالبين .

4) لما : $x=-2$ المعادلة تقبل حلين واحد معدوم والآخر سالب .

5) لما : $x\in]-2,4]$ المعادلة تقبل حلين مختلفين أحدهما موجب والآخر سالب .

عمل منزلي :

التمرين 2 من السلسلة : BAC 2008 .

سير الدرس.

حل BAC2008 :

1) التخمين في نهاية f عند $+\infty$:

نلاحظ من التمثيل البياني أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1,+\infty[$: بقراءة بيانية نجد:

الدالة f متزايدة تماما على $]-1,1] \cup [3,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[1,3]$.

* تشكيل جدول التغيرات:

$f(-1) = -6,\ f(1) = \frac{1}{3},\ f(3) = -1$

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↗	$\frac{1}{3}$	↘	-1	↗	$+\infty$

② العبارة المناسبة هي:

$f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

التبرير:

لأن: $f(3) = -1$ بقراءة بيانية.

③ دراسة تغيرات الدالة f :

أ) المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

ب) إشارة المشتقة: $f'(x) = 0$ من أجل $x = 1$ و $x = 3$.

* نجد التخمينات والقراءة السابقة صحيحة.

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

④ تعيين معادلة للمستقيم (Δ) :

معادلة (Δ) هي: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ لأن: العدد 2 هو فاصلة مماس المستقيم (Δ) بالمنحنى (C)

إذن: $f'(2) = -1$ و $f(2) = -\frac{1}{3}$.

ومنه معادلة المماس (Δ) هي: $y = -x + \frac{5}{3}$

⑤ تعيين إحداثيي نقطة الانعطاف للمنحنى (C) :

x	-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

لدينا من أجل كل $x \in [-1,+\infty[$ فإن: $f''(x) = 2x - 2$

الدالة المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها من أجل $x = 1$

بجوار هذه النقطة إذن النقطة $A(1, \frac{1}{3})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

⑥ رسم المستقيم $y = -1$ نتوصل بيانيا إلى المتراجحة $f(x) < -1$: ومن نقط المنحنى (C) تحت $y = -1$

الرسم أنظر الشكل ومجموعة حلول المتراجحة $f(x) < -1$ هي: $S = [-1, 0[$

⑦ تعيين نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة: $y = 3x - 1$

معناه: $f(x) = y$ أي: $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \cancel{3x} - \cancel{1} = \cancel{3x} - \cancel{1}$ أي: $x^2\left(\frac{1}{3}x - 2\right) = 0$

معناه: $\begin{cases} x^2 = 0 \\ \frac{1}{3}x - 2 = 0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 6 \end{cases}$ إذن النقطتين هما: $B(0;-1)$ و $C(6;17)$

أي: $(D) \cap (C) = \{B(0;-1);\ C(6;17)\}$

المحور: الدوال التناظرية من الشكل $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$

الكفاءات المستهدفة: - استغلال التمثيل البياني للدالة لتخمين النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ وتحديدها. المستوى: 3 آف
- تعيين المستقيمات المقاربة وتفسيرها بيانيا.

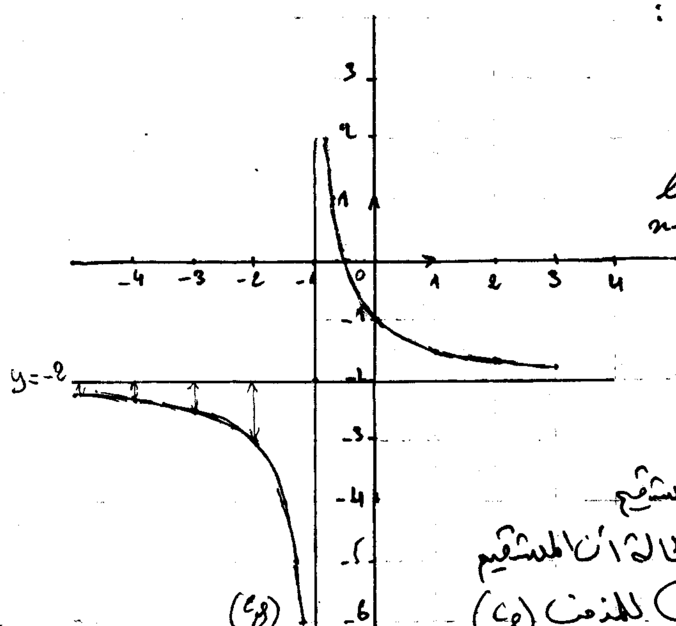
سير الدرس

نشاط 1 ص (88) ؛ الجزء ③.

③ إنجاز نفس العمل السابق بتغيير قيم a, b, c و d:

نفرض: $a=-2$ ، $b=-1$ ، $c=1$ و $d=1$ أي أن: $f(x)=\dfrac{-2x-1}{x+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني التالي:



أ) التخمين في الحالة العامة:

* نلاحظ من التمثيل البياني أن:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

ب) تحديد معادلة المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$:

* نلاحظ أنه ، لما يؤول x إلى $+\infty$ (على التوالي لما يؤول x إلى $-\infty$)، المنحنى (C_f) يقترب تدريجيا من المستقيم ذو المعادلة $y=-2$، نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ و إلى $-\infty$.

* نهايات الدوال التناظرية:

① الدالة التناظرية:

تعريف:

> نسمي دالة تناظرية كل دالة f معرفة على $]-\infty;-\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c};+\infty[$ من الشكل $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث a, b, c و d أعداد حقيقية مع $c\neq0$ و $ad-bc\neq0$.

② - المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل:

نتيجة ①:

> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{a}{c}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{a}{c}$

تعريف:

> نقول عن المستقيم ذو المعادلة $y=y_0$ الموازي لمحور الفواصل أنه مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$) يعني أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ ، $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0\right)$

نتيجة ② :

المنحني (C_f) يقبل ، لما x يؤول إلى $+\infty$ و لما x يؤول إلى $-\infty$ ، مستقيما مقارب موازي لمحور الفواصل معادلته $y=\frac{a}{c}$

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$

1) أدرس نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2) ماذا تستنتج ؟ .

حل :

1) النهايات : لدينا : $a=2$ و $c=1$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{1}=2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{1}=2$

2) الاستنتاج : موازي لمحور الفواصل

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

3) **المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب :**

نتيجة ① :

$\lim_{x\underset{>}{\to} a}\frac{1}{x-a}=+\infty$; $\lim_{x\underset{<}{\to} a}\frac{1}{x-a}=-\infty$ ، $\lim_{x\underset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\underset{<}{\to} 0}\frac{1}{x}=-\infty$

تعريف :

نقول عن المستقيم ذو المعادلة $x=x_0$ الموازي لمحور التراتيب أنه مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يعني أن : $\lim_{x\underset{<}{\to} x_0} f(x)=+\infty$

أو $\lim_{x\underset{<}{\to} x_0} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{x\underset{>}{\to} x_0} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\underset{>}{\to} x_0} f(x)=-\infty$

نتيجة ② :

المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=-\frac{d}{c}$

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x+2}$.

1) أحسب النهايات للدالة f عند -2 .

2) ماذا تستنتج ؟ .

المستوى: 3 آ ف

سير الدرس.

حل المثال:

① حساب النهايات للدالة f عند -2:

لدينا: $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} \frac{1}{x+2} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} \frac{1}{x+2} = +\infty$

② الاستنتاج:

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب لمنحنى الدالة f.

نظرية عامة:

نهاية دالة ناطقية عند $+\infty$ (عند $-\infty$) هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام عند $+\infty$ (عند $-\infty$).

نشاط تقويمي:

باستعمال النظرية العامة أحسب نهايات الدوال التالية عند مجموعة تعريفها:

$$f(x) = \frac{5x+3}{2x-2} \quad , \quad g(x) = \frac{3-2x}{x-2} \quad , \quad h(x) = \frac{3}{-x+4}$$

الحل:

حساب نهايات الدوال عند مجموعة تعريفها:

① $f(x) = \frac{5x+3}{2x-2}$: لدينا: $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

إذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$

② $g(x) = \frac{3-2x}{x-2}$ أي $g(x) = \frac{-2x+3}{x-2}$: لدينا: $D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

إذن، $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \frac{-2}{1} = -2$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{-2}{1} = -2$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} g(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} g(x) = -\infty$

③ $h(x) = \frac{3}{-x+4}$: لدينا: $D_h =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$

إذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 4} h(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 4} h(x) = -\infty$

سير الدرس .

تمارين تدريبية : تمرين ٣ و ٤ ص 91 مع الحلول .

عمل منزلي :

تمارين : 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ص 98 .

ت ١١ و ١٢ ص 99 .

الكفاءة المستهدفة : دراسة الدوال من الشكل $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ المستوى : 3 آف .

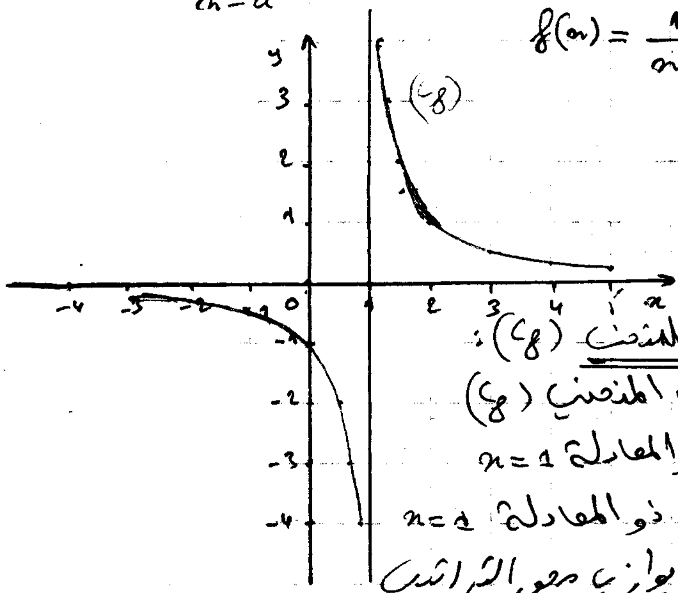
سير الدرس

نشاط ② ص 89 :

لدينا الدالة f المعرفة على $]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-a}$

① نأخذ $a=1$ فنصبح : $f(x)=\frac{1}{x-1}$

التمثيل البياني (C_f) :



أ) تخمين النهايات التالية :

$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$

ب) تحديد معادلة المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) :

نلاحظ أنه لما يؤول x إلى 1 ، المنحنى (C_f)

يقترب تدريجيا من المستقيم ذو المعادلة $x=1$

نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$

② مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور التراتيب

③ لدينا الدالة g المعرفة على $]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{b}{x-1}$

نأخذ $b=-2$ فنصبح : $g(x)=\frac{-2}{x-1}$ وذلك : $g(x)=-2\times\frac{1}{x-1}$

التخمين حسب إشارة العدد الحقيقي b النهايات التالية :

لدينا : $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x \underset{>}{\to} 1} g(x)=-\infty$

4) سؤال إضافي : إستنتاج اتجاه التغير وجدول التغيرات للدالة f :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ ~~ومتزايدة تماما~~

~~على المجال $]1,+\infty[$~~

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

II- دراسة دالة تناظرية :

1) دراسة مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أدرس نهايات الدالة f عند 2 ، عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، واستنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أرسم في معلم متعامد المنحنى (C_f) الممثل للدالة f والمستقيمين المقاربين .

4) عين نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المحورين .

المستوى: 3 آف

تيسير الدروس .

الحل:

1) دراسة النهايات:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$

* يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=(2x-1)\times\left(\frac{1}{x-2}\right)$. لندرس إشارة $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

* لدينا: $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$ و $\lim_{x \underset{<}{\to} 2}\frac{1}{x-2}=-\infty$

ومنه: $\lim_{x \underset{<}{\to} 2} f(x) = -\infty$

* ولدينا: $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$ و $\lim_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = +\infty$

ومنه: $\lim_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = +\infty$

استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مطلوب تحديدهما:

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=2$

ومستقيم مقارب موازي لمحور الأراتيب معادلته $x=2$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f:

أ) المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ والدالة المشتقة هي:

ط1): $f'(x)=\frac{2(x-2)-1(2x-1)}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$ ومنه: $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$

ط2): لدينا: $a=2$ ، $b=-1$ ، $c=1$ و $d=-2$ إذن: $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

أي: $f'(x)=\frac{-4-(-1)}{(x-2)^2}$ ومنه: $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$

ب) إشارة المشتقة:

نلاحظ أن المقام موجب إذن إشارة المشتقة هي إشارة البسط وهي سالبة

أي $f'(x)<0$.

إذن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$ 2	2 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$

المستوى: 3 آف

سير الدرس

③ تقاطع (C_f) مع المحورين:

أ) مع محور الفواصل:

نضع $y=0$ أي: $\frac{2x-1}{x-2}=0$ يعني: $2x-1=0$ و $x-2\neq 0$

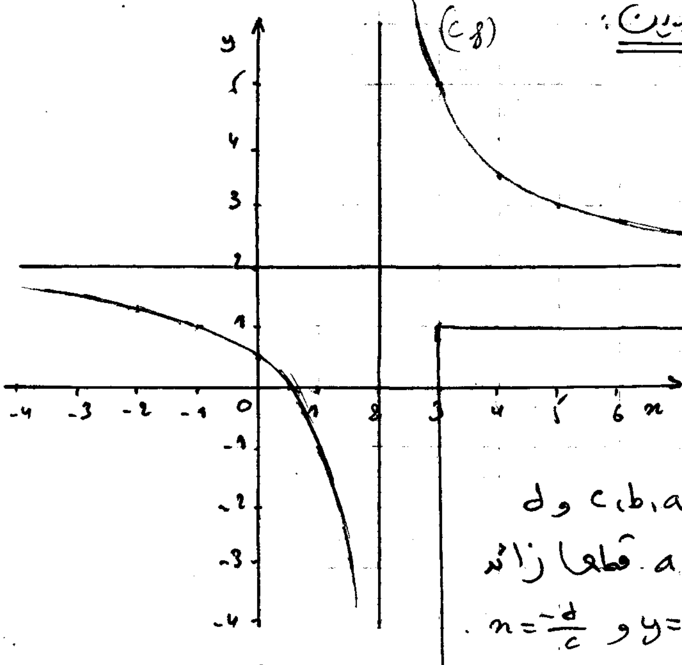
ومنه $x=\frac{1}{2}$ و $x\neq 2$ إذن: $(C_f)\cap(xx')=\{A(\frac{1}{2};0)\}$

ب) محور التراتيب:

نضع $x=0$ نجد: $f(0)=\frac{1}{2}$ ومنه: $(C_f)\cap(yy')=\{B(0;\frac{1}{2})\}$

④) رسم المنحنى (C_f) والمستقيمين المقاربين:

جدول مساعد.



x	-2	-1	0	1	3	4	5	6
y	1,25	+1	$\frac{1}{2}$	-1	5	3,5	3	2,75

⑤ ملاحظة:

يسمى التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $]-\infty;-\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c};+\infty[$ من الشكل $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث: a,b,c و d أعداد حقيقية مع $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$. قطعا زائدا معادلتا مستقيميه المقاربين $y=\frac{a}{c}$ و $x=-\frac{d}{c}$.

تمارين تدريبية: دراسة مثال ص 92 والتمرين المحلول ص 93 ص 96.

عمل منزلي: BAC 2012، استعد للبكالوريا ص 96 و 97.

حل العمل المنزلي:

f دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=2-\frac{a}{x+1}$

1) تبرير أن: $a=3$،

لدينا من خلال البيان $f(0)=-1$ وعليه: $2-\frac{a}{0+1}=-1$

أي: $2-a=1$ ومنه: $a=3$

② أ) حساب النهايات:

من أجل: $a=3$ نجد: $f(x)=2-\frac{3}{x+1}$

$\lim_{x\to -1^{>}} f(x)=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to -1}(x+1)=0^+$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+1}\right)=0$

سير الدرس .

* التفسير الهندسي :

بما أن : $\lim\limits_{x \to -1^{+}} f(x) = -\infty$ فإن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته : $x=-1$.

وبما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ فإن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته : $y=2$.

ب) حساب $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$f'(x) = -\left(\dfrac{0(x+1)-(3)(1)}{(x+1)^2}\right)$ ومنه : $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

بما أن $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

3) أ) حل المعادلة $f'(x) = \frac{3}{4}$ على $]-1;+\infty[$:

لدينا : $f'(x) = \frac{3}{4}$ يعني أن :

وبالتالي : $\dfrac{3}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{4}$

$\cancel{3}(x+1)^2 = \cancel{3} \times 4$

معناه : $\begin{cases} x+1 = 2 \\ \text{أو} \\ x+1 = -2 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -3 \end{cases}$ مقبول (لأن $1 \in]-1;+\infty[$) ، مرفوض (لأن : $-3 \notin]-1;+\infty[$) .

إذا المعادلة تقبل حل وهو $x = 1$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) كتابة معادلة المماس (Δ) :

بما أن (Δ) يوازي المستقيم (D) الذي معادلته : $y = \frac{3}{4}x - 1$

فإن : $f'(x) = \frac{3}{4}$ من سبق $x = 1$.

وبالتالي معادلة المماس (Δ) هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

لدينا : $f(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ و $f'(1) = \frac{3}{4}$.

إذن : $y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$ أي : $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{2}{4}$ ومنه : $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

4) حساب $f(\frac{1}{2})$ ثم حل بيانيا المتراجحة $f(x) \geq 0$:

لدينا : $f(\frac{1}{2}) = 2 - \dfrac{3}{\frac{1}{2}+1}$ أي : $f(\frac{1}{2}) = 2 - \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = 2-2=0$ ومنه : $f(\frac{1}{2}) = 0$

وعليه إشارة الدالة f هي :

x	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
إشارة $f(x)$		$-$	0	$+$	

* حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ بيانيا هي :

$S = [\frac{1}{2};+\infty[$

عمل منزلي : الأعمال الموجهة ص (94) و (95) .

الكفاءة المستهدفة : التعرف على المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات .

المستوى : 3 آ ف

سير الدرس

نشاط (تمرين الأعمال الموجهة ص (94)) :

بواسطة قراءة لجدول التغيرات نجيب عن الأسئلة التالية :

1) تعيين مجموعة التعريف والنهايات لكل دالة ② ثم إعطاء التفسير البياني :

أ) جدول الدالة $f_1(x)$: * مجموعة التعريف

الدالة f_1 معرفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

* النهايات : $\lim\limits_{x\to -\infty} f_1(x) = 1$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f_1(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f_1(x) = -\infty$

② * التفسير الهندسي :

من النهايات نستنتج أن المنحني (C_{f_1}) يقبل مستقيمين مقاربين هما :

$x=0$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب .

و $y=1$ 〃 〃 〃 〃 محور الفواصل .

ب) جدول الدالة $f_2(x)$:

* مجموعة التعريف :

الدالة f_2 معرفة على المجال $]0;+\infty[$:

* النهايات :

لدينا : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f_2(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = 1$

* التفسير الهندسي :

المنحني (C_{f_2}) يقبل مستقيمين مقاربين هما :

$x=0$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب .

و $y=1$ 〃 〃 〃 〃 〃 الفواصل .

ج) جدول التغيرات للدالة f_3 : * مجموعة التعريف :

الدالة f_3 معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

* النهايات :

لدينا : $\lim\limits_{x\to -\infty} f_3(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f_3(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f_3(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f_3(x) = +\infty$

* التفسير الهندسي :

المنحني (C_{f_3}) يقبل مستقيمين مقاربين هما :

$x=1$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب .

و $y=0$ 〃 〃 〃 〃 الفواصل .

سير الدرس .

د) جدول التغيرات للدالة f_4 :

* مجموعة التعريف : $D_{f_4} = [1;10[\cup]10,+\infty[$ * النهايات :

لدينا : $\lim_{x\to 1} f_4(x) = 3$ ، $\lim_{x \overset{<}{\to} 10} f_4(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} 10} f_4(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = 5$

هـ) التفسير الهندسي :

المنحنى (C_{f_4}) يقبل مستقيمين مقاربين هما :

$x=10$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب.

$y=5$ " " " الفواصل .

3) كيفية التعرف على المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب (إن وجدت) :

نلاحظ أنه لما يؤول x إلى العدد a (حيث a عدد حقيقي غير معرف عند الدالة f أي عند الخط المضاعف في جدول التغيرات .) تكون نهاية الدالة f هي $-\infty$ أو $+\infty$ ، نقول أن $x=a$ م م يوازي

4) كيفية التعرف على المستقيمات المقاربة الموازية لمحور الفواصل (إن وجدت) :

نلاحظ أنه ، لما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ تكون نهاية الدالة f هي العدد الحقيقي b ، نقول أن $y = b$ مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل .

* الربط بين دالة، جدول تغيرات ومنحنى :

حلول الأعمال الموجهة ص (92) :

* إرفاق بكل دالة جدول تغيراتها وتمثيلها البياني مع التبرير :

1) الدالة f : حيث $f(x)=1-\frac{3}{x-2}$

* جدول تغيراتها هو : رقم (4) لأن مجموعة تعريفها هي : $D_f =]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

* التمثيل البياني : هو التمثيل رقم (4) لأن : $D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

أو أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين هما : $x=2$ و $y=1$.

2) الدالة g : حيث : $g(x) = 2-\frac{1}{x-1}$

* جدول التغيرات : هو الجدول رقم (1) لأن : $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 2$

* التمثيل البياني : هو التمثيل رقم (3) لأن : " $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 2$ "

و المنحنى (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين هما : $x=1$ و $y=2$.

3) الدالة h : حيث : $h(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{2}{x-1}$

* جدول التغيرات : هو الجدول رقم (3) لأن : $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

* التمثيل البياني : هو التمثيل رقم (2) لأن : $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

أو أن المنحنى (C_h) يقبل مستقيم مقارب واحد يوازي محور التراتيب معادلته $x=1$

عمل منزلي : تمرين (3) الأعمال الموجهة ص (94) .