

✓ NOUVEAU
PROGRAMME

ANJIM أنجيم

Hard_equation

الرياضيات

في



ثانوي

3 AS

جبر تحليل هندسة

رياضيات

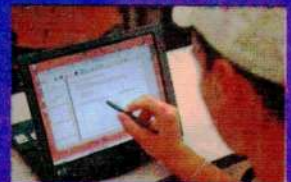
تقني رياضي

علوم تجريبية

- ملخص عملي للدرس .
- تمارين محلولة للتطبيق .
- تمارين مقترحة للتدريب .
- مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة .
- دليل إستعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

إعداد : الأستاذ ترفعين مصطفى

وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية



أنجيم ANJIM

الرياضيات في

ثانوي

3 AS

جبر تحليل هندسة

رياضيات
تقني رياضي
علوم تجريبية

- اخص عملي للدرس .
- تمارين محلولة ، تطبيقات .
- تمارين مقترحة للتدريب .
- مواضيع بكالوريا اجنبية محلولة .
- دليل استعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

Hard equation

إعداد : الأستاذ ترفعين مصطفى

وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية



مقدمة

يترجم هذا الكتاب إلى تلاميذ أقسام السنة الثالثة ثانوي، بشعبه العلمية، وبدخل في إطار سلسلة 83 plus. قد ندمى ((أنجم)) - المختهد - . وقد أعد الكتاب وفقا لبرنامج الرسمي الجديد. لوزارة التربية الوطنية والذي سيتم في تطبيقه مع هذه الأقسام ابتداء من هذه السنة الدراسية 2008/2007.

أهداف الكتاب

- تمكّن التلميذ من الحصول على معلومات محدّدة ومنّخصة.
- يساعد التلميذ على تطبيق المعلومات التي تحضّ عليها في القسم.
- يدرّب التلميذ على الاستيعاب الحسن والتبرّج الجيد للمعلومات.
- يحضّر التلميذ لاجتياز امتحان الكفاءة.

محتوى الكتاب

- يحتوي الفصل الأول من هذا الكتاب على مستحبات لمحاوّر العشرة التي يتضمّن منها برنامج الدراسي لمادة الرياضيات. يُقدّم المنحّص على شكل: تعريف - مهنة - - لمحفّظ - نتائج . ويكون داخل إطار، يحدّد للتلميذ بالضبط بداية ونهاية المعلومة.
- يتبع كل محور بخمسة تمارينات تطبيقية مموّلة.
- في نهاية كل محور يجد التلميذ عشرة تمارينات لتدريب تتضمن مهارات المحوّر.
- تحضّن الجزء الثاني من الكتاب ليكالوريا (2005/2006/2007) لدول أجنبية. يتماشى برنامجها الدراسي في مادة الرياضيات و البرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية الجزائرية.
- يتبع كل موضوع بمقترح للحل.
- في نهاية الكتاب، يجد التلميذ بعض الدسائر الأكثر استعمالا في هذا البرنامج.
- في نهاية الكتاب، يجد التلميذ بعض التعميمات الخاصة باستعمال الخاصية $83plus$ في أعزائي التلاميذ: تمسيدا لتطبيقاتكم لنتائج في هذه السنة الدراسية. أضع بين أيديكم هذا الكتاب. الذي يأتي ليساعدكم ويدلّل بعض الصعوبات التي ربما تعثر بكم خلال تحضيراتكم لامتحان.
- أرجو لك عزيزي التلميذ التوفيق في استعمال هذا الكتاب. وتُحذّر الإشارة هنا إلى ضرورة حل التمرين من طرف التلميذ قبل الإطلاع على الحل. ((المهم في التمرين هو حله والأهم هو التفكير في حله.))
- هذا الكتاب، يبقى إلى ما بعد البكالوريا كمرجع للطلاب، كونه يتضمّن منحصات مفاهيم أساسية في البرنامج العام للرياضيات.

الأستاذ: تزقعين مصطفى

ثانوية مفدي زكرياء- بني يزقن- ولاية غرداية // العنوان الالكتروني: mtizmath@gmail.com

بسم الله الرحمن الرحيم
Hard_equation

عنوان الكتاب: أنجم في الرياضيات 3 ثانوي

إعداد: الأستاذ: تزقعين مصطفى

دار نزهة الألبان

لتنشر الكتب والرسائل

العلم والمعرفة

ساحة العقيد لطفى غرداية

هاتف فاكس: 029.88.35.49

هاتف Tel: 029.89.95.80

الإيداع القانوني

3367/2007

ISBN 978-9961-6615-7-5

تصميم الغلاف

CYCLOPEDIA

الفريق التقني لدار نزهة الألبان

جميع الحقوق محفوظة للمؤلف

لا يجوز نشر أي جزء من هذا الكتاب
أو تصويره أو تخزينه بأي وسيلة من الوسائل
دون موافقة كتابية من الناشر

All rights reserved. No part of
this book may be reproduced,
transmitted in any form or by
any means without prior
permission in writing of the
publisher.

محفوظ
جميع الحقوق

1- الحساب

ما يجب أن يعرف:

★ قابلية القسمة في $\%$.

◆ قاسم ومضاعف عدد صحيح:

تعريف

a و b عددان صحيحان.

نقول أن b يقسم a إذا وجد عدد صحيح k بحيث: $a = kb$ ونرمز بـ: $b \mid a$.

نقول أيضا أن: العدد b قاسم للعدد a . وكذلك أن: العدد a مضاعف للعدد b .

◆ خواص.

• كل عدد صحيح هو قاسم للعدد 0 ، و 0 هو المضاعف الوحيد للعدد 0 .

• مضاعفات عدد صحيح غير معلوم n هي الأعداد من الشكل kn حيث k عدد صحيح،

ونرمز لمجموعة هذه المضاعفات بـ: $n\%$. ولدينا $0\% = \{0\}$.

• من أجل كل عدد صحيح a ، العدد 1 هو قاسم للعدد a .

• كل عدد صحيح a يقبل على الأقل القواسم: $1, -1, a, -a$.

• من أجل كل عددين صحيحين a و b . إذا كان b يقسم a و a يقسم b

فإن $a = b$ أو $a = -b$.

• a, b, c أعداد صحيحة:

- إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c

- إذا كان a يقسم b فإن a يقسم bc

- إذا كان a يقسم b فإن ac يقسم bc

- إذا كان a يقسم b و a يقسم c فإن a يقسم $b + c$

و a يقسم $b - c$

Hard Equation

الفصل الأول

ملخصات للدروس

تمارين تطبيقية

تمارين للحل

- إذا كان a يقسم b و a يقسم c فإن a يقسم $kb + k'c$ حيث k و k' عدنان صحيحان.

◆ القسمة الإقليدية في N .

تعريف

a و b عدنان طبيعيان، حيث b يختلف عن الصفر. توجد ثنائية وحيدة $(q; r)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $0 \leq r < b$ و $a = bq + r$. عملية إيجاد الثنائية $(q; r)$ انطلاقاً من a و b تدعى القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . q يدعى حاصل القسمة و r يدعى باقي القسمة.

للحفظ

b يقسم a إذا وفقط إذا كان في القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b ، باقي القسمة r معدوم. عند قسمة العدد الطبيعي a على العدد الطبيعي غير المعدوم b يكون باقي القسمة إما 0 ، إما 1 إما 2 إما... إما $(b-1)$.

◆ الموافقة العددية في Z .

تعريف

a و b عدنان صحيحان، و n عدد طبيعي. نقول أن العدد a يوافق العدد b بتريديد n إذا وفقط إذا كان العدد $(a-b)$ مضاعف n ونرمز: $a \equiv b[n]$

للحفظ

a, b, c أعداد صحيحة و n عدد طبيعي غير معدوم.

- $a \equiv a[n]$ (الانعكاسية)
- إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$ (التناظرية). نقول أن a و b متوافقان.
- إذا كان $(a \equiv b[n])$ و $(b \equiv c[n])$ فإن $a \equiv c[n]$ (المتعدية).
- $a \equiv 0[n]$ يكافئ a يقبل القسمة على n .

للحفظ

a, b, a', b' أعداد صحيحة و m, n عدنان طبيعيان غير معدومين.

- $a \equiv b[n]$ يكافئ $(a + a') \equiv (b + a')[n]$.
- إذا كان $(a \equiv b[n])$ و $(a' \equiv b'[n])$ فإن $a + a' \equiv b + b'[n]$.
- إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $aa' \equiv ba'[n]$.
- إذا كان $(a \equiv b[n])$ و $(a' \equiv b'[n])$ فإن $a \times a' \equiv b \times b'[n]$.
- إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^m \equiv b^m[n]$.

◆ القاسم المشترك الأكبر $PGCD$

تعريف

a و b عدنان طبيعيان غير معدومين. القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر عنصر في مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين. يرمز له $PGCD(a; b)$

مبرهنة 1

إذا كان r هو الباقي في القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي غير المعدوم a على العدد الطبيعي غير المعدوم b وكان $r \neq 0$ ، فإن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r .

للحفظ

a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة.

- $PGCD(a; b; c) = PGCD(PGCD(a; b); c)$
- $PGCD(a; b) = b$ يكافئ b يقسم a .
- $PGCD(a \times c; b \times c) = c \times PGCD(a; b)$
- $PGCD(a; b) = 1$ يكافئ a و b أوليان فيما بينهما).
- $PGCD(a; b) = d$ يكافئ $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ أوليان فيما بينهما).
- مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة قواسم العدد $PGCD(a; b)$.

خوارزمية إقليدس

a و b عدداً طبيعيين غير معدومين حيث $b < a$ و b لا يقسم a .
نسمي q_1 و r_1 الحاصل والباقي في القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .
بمخري قسمة إقليدية للعدد b على العدد r_1 ، وهكذا إلى أن نصل إلى باق معدوم. فنكتب القسمة الإقليدية المتتابعة كما يلي:

$$a = bq_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < b)$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_{p-1} = r_pq_{p+1} + 0$$

هذه القسمة الإقليدية المتتابعة

تدعى خوارزمية إقليدس.

المتتالية (r_n) موجبة ومتناقصة

تماماً. أصغر حد لها غير معلوم

هو $PGCD(a, b)$.

مبرهنة 2- بيزو-

عدداً طبيعيين غير معدومين a و b ، أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عدداً صحيحان α و β بحيث: $\alpha a + b\beta = 1$.

مبرهنة 3- غوص-

a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة. إذا كان a يقسم $b \times c$ و كان a و b أوليان فيما بينهما، فإن a يقسم c .

للحفظ

- إذا كان عدد طبيعي a يقبل القسمة على عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما b و c فإن العدد a يقبل القسمة على bc .
- إذا كان $PGCD(a, b) = d$ فإنه يوجد عدداً صحيحان α و β بحيث: $\alpha a + b\beta = d$.
- عدد طبيعي أولي مع جدها عددين طبيعيين إذا وفقط إذا كان أولي مع كل عامل من اجزاء.

المضاعف المشترك الأصغر PPCM

تعريف

a و b عدداً طبيعيين غير معدومين.
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عنصر غير معلوم في مجموعة المضاعفات المشتركة لتذين العددين. يرمز له $PPCM(a, b)$.

خواص

a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة.

$$PPCM(a, b, c) = PPCM(PPCM(a, b), c).$$

$$PPCM(a, b) = a \text{ معناه } a \text{ مضاعف } b.$$

$$PPCM(a \times c, b \times c) = c \times PPCM(a, b).$$

$$PPCM(a, b) = ab \text{ معناه } a \text{ و } b \text{ أوليان فيما بينهما.}$$

$$PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = ab.$$

$$PPCM(a, b) = m \text{ معناه } \frac{m}{a} \text{ و } \frac{m}{b} \text{ أوليان فيما بينهما.}$$

• مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b هي مجموعة مضاعفات العدد

$$PPCM(a, b)$$

الأعداد الأولية

تعريف

العدد طبيعي p أولي إذا وفقط إذا قبل قاسمان بالضبط وهما: 1 و p .

للحفظ

- العدداً 0 و 1 غير أوليين.
- العدد 2 هو أول عدد طبيعي أولي وهو الطبيعي الزوجي الأولي الوحيد.
- إذا كان p عدد أولي فهو أولي مع الأعداد $2, 3, \dots, p-1$.
- إذا كان عدد أولي يقسم جداء عوامل فهو يقسم أحد هذه العوامل.
- كل عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل على الأقل قاسماً أولياً.
- كل عدد طبيعي غير أولي n و أكبر من 1 يقبل على الأقل قاسماً أولياً p حيث: $p^2 \leq n$.

متتالية
الأعداد
الأولية غير
منتبهة.

طريقة

اكتب العدد 485 في النظام ذي الأساس 2 ثم الأساس 5 ثم الأساس 12.

$$\begin{array}{rcl}
 485 & = & 2 \times 242 + 1 \\
 485 & = & 12 \times 40 + 5 \\
 40 & = & 12 \times 3 + 4 \\
 485 & = & 5 \times 97 + 0 \\
 97 & = & 5 \times 19 + 2 \\
 19 & = & 5 \times 3 + 4 \\
 242 & = & 2 \times 121 + 0 \\
 121 & = & 2 \times 60 + 1 \\
 60 & = & 2 \times 30 + 0 \\
 30 & = & 2 \times 15 + 0 \\
 15 & = & 2 \times 7 + 1 \\
 7 & = & 2 \times 3 + 1 \\
 3 & = & 2 \times 1 + 1
 \end{array}$$

$$485 = \overline{345}^{(12)} \text{ أي } , 485 = \overline{3420}^{(5)} \text{ أي } , 485 = \overline{111100101}^{(2)} \text{ أي}$$

طريقة

انشر العدد $\overline{1\alpha 52}^{(11)}$ في أساسه ثم اكتبه في النظام ذي الأساس 7.

$$\begin{array}{rcl}
 \overline{1\alpha 52}^{(11)} & = & 2 \times 11^0 + 5 \times 11^1 + 10 \times 11^2 + 1 \times 11^3 = 2598 \\
 2598 & = & 7 \times 371 + 1 \\
 371 & = & 7 \times 53 + 0 \\
 53 & = & 7 \times 7 + 4 \\
 7 & = & 7 \times 1 + 0 \\
 2598 & = & \overline{10401}^{(7)} = \overline{1\alpha 52}^{(11)} \text{ أي:}
 \end{array}$$

العدد 7431 مكتوب في الأساس 8، أكتب نفس العدد في الأساس 2.

$$\begin{array}{rcl}
 7431 & = & 1 \times 8^0 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^2 + 7 \times 8^3 \\
 & = & 1 + (1+2) \times 2^3 + 2^2 \times 2^6 + (1+2+2^2) \times 2^9 \\
 & = & 1 + 2^3 + 2^4 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} \\
 & = & 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + \\
 & & + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^{11} \\
 & & \overline{7431}^{(8)} = \overline{111100011001}^{(2)} \text{ أي:}
 \end{array}$$

تحليل عدد طبيعي إلى جدا عوامل أولية.

مبرهنة 4

كل عدد طبيعي غير أولي n وأكبر من 1، يقبل تحليلاً وحيداً إلى جدا

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_m^{a_m}$$

عوامل أولية. ويكتب بالشكل: حيث: p_1, p_2, \dots, p_m أعداد أولية متميزة و a_1, a_2, \dots, a_m أعداد طبيعية غير معلومة. (m عدد طبيعي).

التعداد

مبرهنة 5

x عدد طبيعي أكبر من 1.

كل عدد طبيعي n يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على الشكل:

$$n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$$

حيث: $a_p \neq 0$ و $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ أعداد طبيعية تحقق:

$$0 \leq a_h < x \text{ من أجل كل عدد طبيعي } h < p$$

هذه الكتابة للعدد n تدعى نشر العدد n وفق الأساس x . ونرمز:

$$n = \overline{a_p \dots a_2 a_1 a_0}^{(x)}$$

للحفظ

- كل عدد طبيعي أصغر من الأساس x يدعى رقماً في الأساس x .
- في نظام التعداد ذي الأساس 2 الرقمان هما: 0، 1.
- في نظام التعداد ذي الأساس 10 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9.
- في نظام التعداد ذي الأساس 11 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، α (يمثل 10).
- في نظام التعداد ذي الأساس 12 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، α ، β (يمثل 11).

تمارين محلولة

الموافقة العددية

1 عَيِّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $2^n - 1$ يقبل القسمة على 17.

الحل: ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 17.

نجد: $2^0 \equiv 1 [17]$ ، $2^1 \equiv 2 [17]$ ، $2^2 \equiv 4 [17]$ ، $2^3 \equiv 8 [17]$ ، $2^4 \equiv 16 [17]$ ، $2^5 \equiv 15 [17]$ ، $2^6 \equiv 13 [17]$ ، $2^7 \equiv 9 [17]$ ، $2^8 \equiv 1 [17]$...

من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 8، إذاً: $2^n \equiv 1 [17] \iff n = 8k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

الموافقة العددية

2 عَيِّن الباقي في القسمة الإقليدية لـ: 56^{66} على 5 ، 155^{13} على 3 ، 2008^{2007} على 9 ، 2006^{2008} على 2007.

الحل: $56 \equiv 1 [5]$ منه $56^{66} \equiv 1^{66} [5]$ أي $56^{66} \equiv 1 [5]$ إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 56^{66} على 5 هو 1.

$155 \equiv 2 [3]$ منه $155^{13} \equiv 2^{13} [3]$ ، $2^{13} \equiv 2 [3]$ ، $2^2 \equiv 1 [3]$ من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 2 ، ولدينا: $2^{13} = 2^{2 \times 6 + 1} = 2^2 \equiv 1 [3]$ فإن $2^{13} \equiv 2 [3]$ ، إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 155^{13} على 3 هو 2.

$2008 \equiv 1 [9]$ منه $2008^{2007} \equiv 1^{2007} [9]$ أي $2008^{2007} \equiv 1 [9]$ إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 2008^{2007} على 9 هو 1.

$2006^2 \equiv 2 [2007]$ ، $2006^3 \equiv 0 [2007]$ ، $2006^n \equiv 1 [2007]$ من خواص الموافقة ينتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 2 لدينا:

$[2007] \equiv 0$ ، وبالتالي باقي قسمة 2006^{2008} على 2007 هو 0.

خوارزمية اقليدس- ميرهندي بيرو و غوص

3 يَبِين أن المعادلة $53x + 25y = 1$ تقبل حلاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، ثم حل هذه المعادلة.

الحل: باستعمال خوارزمية اقليدس نجد: $53 = 25 \times 2 + 3$ و $25 = 3 \times 8 + 1$ ، يعني $3 = 1 \times 3 + 0$ إذاً آخر باقي غير معدوم في هذه القسمة هو 1.

$PGCD(53; 25) = 1$ (يمكن ترتيب العمليات في جدول)

أي العددين 53 و 25 أوليان فيما بينهما. وبالتالي حسب بيرو توجد على الأقل ثنائية $(\alpha; \beta)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تحقق المعادلة $53\alpha + 25\beta = 1$. هذه الثنائية $(\alpha; \beta)$ تعتبر حلاً للمعادلة المطلوبة. (ثنائية بيرو ليست وحيدة)

لحل المعادلة نوجد حلاً خاصاً باستعمال خوارزمية اقليدس كما يلي: $1 = 25 - 3 \times 8$ أي

$$1 = 25 - (53 - 25 \times 2) \times 8$$

وبالتالي: $1 = 53 \times (-8) + 25 \times (17)$ ، يعني أن الثنائية $(-8; 17)$ حلاً خاصاً للمعادلة.

نوجد إذاً جميع الحلول كما يلي:

من الكتابتين $53x + 25y = 1$ و $1 = 53 \times (-8) + 25 \times (17)$ وبالطرح طرف من طرف نحصل على: $53(x + 8) = 25(-y + 17)$ هذا يعني أن 25 يقسم العدد $53(x + 8)$ وبما أن

53 و 25 أوليان فيما بينهما (حسب ما سبق) فحسب غوص 25 يقسم $(x + 8)$

$$\text{أي } (x + 8) = 25k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ إذاً } x = 25k - 8$$

لإيجاد قيم y نعوض x بقيمته في المعادلة $53x + 25y = 1$ فنجد بعد الحساب: $y = -53k + 17$ وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المطلوبة هي: $\{(25k - 8; -53k + 17) / k \in \mathbb{Z}\}$.

التحليل إلى جداء عوامل أولية

4 أوجد الثنائيات $(x; y)$ من المجموعة $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ والتي تحقق المعادلة: $x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$

إذا كان $d=7$ فإن: $a'+b'=83$ و $d \times b'=240$ يعني a' و b' حلّي
المعادلة: $x^2 - 83x + 240 = 0$ وبالتالى: $a'=80$ و $b'=3$ منه: $a=560$ و $b=21$.
إذا كان $d=1$ فإن: $a'+b'=581$ و $d \times b'=240$ مستحيل.
خلاصة: العددين المطلوبان هما: 560 و 21.

التعداد

n عدد طبيعي، يكتب في الأسس x بالشكل 1254، ويكتب العدد $2n$ في نفس الأسس x بالشكل 2541. عيّن x .	6
أكتب العدد n في الأساس 10، ثم اكتب العدد $3n$ في الأساس x .	

الحل: لدينا: $n = 4 + 5x + 2x^2 + x^3$ و $2n = 1 + 4x + 5x^2 + 2x^3$
تنتج المعادلة التالية: $x^2 - 6x - 7 = 0$

ذات المجهول الطبيعي x حيث: $x > 5$. حلّي المعادلة هما: -1 و 7 إذاً $x=7$.
يعني n يكتب 480 في الأساس 10.
 $n = \overline{1254}^{(7)} = 4 + 5 \times 7 + 2 \times 7^2 + 1 \times 7^3 = 480$

$3n$ يكتب 1440 في الأساس 10 ثم يحوّل إلى الأساس 7.

$$1440 = 7 \times 205 + 5$$

$$\text{نجد: } 205 = 7 \times 29 + 2 \text{ أي } n = \overline{4125}^{(7)}$$

$$29 = 7 \times 4 + 1$$

تمارين للتدريب

- القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي a على كل من العددين 155 و 161 تعطي نفس
الحاصل، والباقيان على الترتيب 65 و 23. تعرّف على العدد a .
- ماهي البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لعدد طبيعي فردي على 4؟.
- بين أنه إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن العدد $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8.
- عيّن البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لمربع عدد صحيح على 8.

الحل: لدينا: $x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$ تكافئ $(x-y)(x+y) = 2^2 \times 23^2$ يعني أن كلا
من العددين $(x-y)$ و $(x+y)$ يقسم العدد $2^2 \times 23^2$ علماً أن: $0 < x-y \leq x+y$
و $(x-y)$ و $(x+y)$ زوجيان معاً أو فرديان معاً.
نوجد أولاً قواسم العدد $2^2 \times 23^2$ وهي من الشكل $2^n \times 23^m$ حيث: $n \in \{0;1;2\}$ و
 $m \in \{0;1;2\}$ هذه القواسم هي:

1; 2; 4; 23; 46; 92; 529; 1058; 2116 وباستعمال الشرط السابق نحصل
على الجملتين التاليتين:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=1058 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x-y=46 \\ x+y=46 \end{cases} \text{ وبعد حلها نجد الثنائيات } (x; y) \text{ المطلوبة وهي:} \\ (530; 528) \text{ و } (46; 0).$$

العلاقة بين PGCD و PPMC

5 أوجد عددين علماً أن مجموعهما 581 وحاصل قسمة مضاعفيهما المشترك الأصغر على
قاسميهما المشترك الأكبر هو 240.

الحل: نبحث عن عددين a و b بحيث: $a+b=581$ و

$$PPCM(a; b) = 240 \times PGCD(a; b)$$

علماً أن: $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = ab$ وأن: $PGCD(a; b) = d$

معناه $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ أوليان فيما بينهما

فإن الشرط الثاني يكتب: $d \times b' = 240$ و $d \times a' = a$ و $b = d \times b'$

$$PGCD(a'; b') = 1$$

نبحث أولاً عن عددين a' و b' بحيث: $d(a'+b') = 581$ و $d \times b' = 240$

$$PGCD(a'; b') = 1$$

الشرط الأول يعطي قيم d الممكنة وهي قواسم 581 الذي يكتب 7×83 إذاً:

$$d \in \{1; 7; 83; 581\}$$

مناقشة: إذا كان $d=581$ فإن: $a'+b'=1$ و $d \times b' = 240$ مستحيل.

2- الدوال العددية

Hard Equation

ما يجب أن يعرف:

* **عموميات**

في كامل هذا المحور، نتعامل مع الدوال العددية للمتغير الحقيقي، يعني دوال تأخذ متغيراتها من جزء في R (تدعى مجموعة البدء) وتضع قيمها في جزء من R (تدعى مجموعة الوصول).

◆ **مجموعة التعريف**

تعريف مجموعة تعريف الدالة f هي جزء من مجموعة البدء وتضم الأعداد التي لها صورة في مجموعة الوصول بالدالة f . ونرمز لها: D_f

◆ **التمثيل البياني**

تعريف في المستوي المنسوب إلى المعلم $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$ ، التمثيل البياني

للدالة f هو مجموعة النقط M من المستوي والتي إحداثياتها $(x; y)$

تحقق: $x \in D_f$ و $y = f(x)$ **معادلة ديكارتية للتمثيل البياني**

◆ **الشفعية - الدورية**

(الدالة f زوجية) يعني أنه (من أجل كل x من D_f : $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$)

(الدالة f فردية) يعني أنه (من أجل كل x من D_f : $-x \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$)

(الدالة f دورية ودورها p) يعني أنه (من أجل كل x من D_f : $(x+p) \in D_f$ و

$(x-p) \in D_f$ و $f(p+x) = f(x)$) . (p عدد حقيقي موجب تماما)

عَيِّن الأعداد الصحيحة n التي تحقق: $[8] \equiv 1 \pmod{n+3}$.

4. n عدد طبيعي.

1. أوجد حسب قيم العدد n البواقي الممكنة في قسمة العدد 5^n على 13.

2. استنتج أن العدد $2007^{2008} - 1$ يقبل القسمة على 13.

3. بَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم، العدد $31^{4n+1} + 44^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13.

5. بَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العددان التاليان أوليان فيما بينهما، في كل حالة:

(1): $n+2$ و $n+3$ ، (2): $7n+2$ و $4n+1$ ، (3): $n(2n+1)$ و $n+1$ ، (4): $2n+1$ و $3n+1$.

6. n عدد طبيعي غير معلوم، نضع: $a = 4n+3$ و $b = 5n+2$ و $d = PGCD(a; b)$

1. أعط قيمة d في كل حالة من الحالات الثلاث التالية: $n=1$ ، $n=11$ ، $n=15$.

2. احسب العدد $5a - 4b$ واستنتج قيم d الممكنة.

3. عَيِّن العددین الطبيعيين n و k بحيث: $4n+3=7k$ ، ثم العددین الطبيعيين n و k'

بحيث: $5n+2=7k'$.

7. حل في المجموعة $N \times N$ كلا من المعادلات التالية:

(1): $x^2 - y^2 = 77$ ، (2): $x^2 - y^2 = 36$ ، (3): $x^2 - y^2 = 165$ ، (4): $xy - 3y - 24 = 0$.

8. a و b عددان طبيعيان غير معدومين، نضع: $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$

تعرف على جميع الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق: $m = d^2$ و $d + m = 156$ و $a \geq b$.

9. لا يملك نسيم إلا قطعاً نقدياً ذات $20DA$ وأوراقاً نقدية ذات $100DA$. علماً أن لديه

مبلغ $300DA$. كم قطعة وكم ورقة نقدية لنسيم؟

10. نضع: $a \in Z$ و $b \in Z^*$

1. نفرض أن $PGCD(a; b) = 1$ ، بَيِّن باستعمال مبرهنة بيزو أن: $PGCD(a; b^2) = 1$

و $PGCD(a^2; b^2) = 1$

واستنتج أن: $PGCD(a; b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2; b^2) = 1$

2. نعتبر x عدد صحيح.

• انشر العبارة: $(x^2 + x - 1)^2$ ، وحللّ العبارة: $x^2 + x - 2$ و $x^2 + 4x + 4$.

• عَيِّن الأعداد الصحيحة x بحيث يكون الكسر $\frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$ قابلاً للاختزال.

للحفظ

- إذا كانت الدالة f زوجية فإن محور الترتيب في المعلم المتعامد هو محور تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة f فردية فإن مبدأ المعلم هو مركز تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة f دورية ودورها p ، فإن تمثيلها البياني صامد إجمالاً بالانسحابات التي شعاعها pki حيث $(k \in \mathbb{Z})$

♦ تركيب دالتين

تعريف

- نعتبر E ، F و G ثلاثة أجزاء من R .
- إذا كانت الدالة f من E نحو F وكانت الدالة g من F نحو G ، فإن الدالة $g \circ f$ تدعى مركب الدالتين f و g بهذا الترتيب وهي من E نحو G معرفة بس: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.
- ولدينا: $x \in D_{g \circ f}$ يكافئ $(x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g)$

♦ اتجاه تفسير دالة

تعريف

- f دالة عددية معرفة على المجال I
- $|f$ متزايدة تماماً على I | يكافئ
- من أجل كل x_1 و x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$
- $|f$ متناقصة تماماً على I | يكافئ
- من أجل كل x_1 و x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$
- $|f$ متزايدة على I | يكافئ
- من أجل كل x_1 و x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \leq f(x_2)$
- $|f$ متناقصة على I | يكافئ
- من أجل كل x_1 و x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \geq f(x_2)$
- $|f$ ثابتة على I | يكافئ
- من أجل كل x_1 و x_2 من I ، $f(x_1) = f(x_2)$

للحفظ

- f و g دالتان معرفتان على نفس المجال I .
- إذا كان للدالتين f و g نفس اتجاه التغير فإن $g \circ f$ تكون متزايدة على I .
- إذا كان للدالتين f و g اتجاهات تغير متعاكسين فإن $g \circ f$ تكون متناقصة على I .

♦ القيم الحدية للدالة

تعريف

- f دالة عددية معرفة على المجموعة D من R و x_0 عنصر من D .
- الدالة f تقبل قيمة حدية عظيمة عند x_0 يكافئ من أجل كل x من D ،
- $f(x) \leq f(x_0)$.
- الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند x_0 يكافئ من أجل كل x من D ،
- $f(x) \geq f(x_0)$.
- الدالة f تقبل قيمة حدية عظيمة محلية عند x_0 يكافئ يوجد مجال I من D يضم x_0 بحيث، من أجل كل x من I ، $f(x) \leq f(x_0)$.
- الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى محلية عند x_0 يكافئ يوجد مجال I من D يضم x_0 بحيث، من أجل كل x من I ، $f(x) \geq f(x_0)$.
- في هذه التعاريف، $f(x_0)$ تدعى قيمة حدية للدالة f عند x_0 .

نهايات دوال مألوفة

* النهايات

الدوال $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto x $	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$
مجموعة التعريف	R	R_+	R	R^*
النهاية عند $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+
النهاية عند $-\infty$	$+\infty$ / $-\infty$	غير موجود	$+\infty$	σ / 0^-
النهاية عند x_0 $x_0 \in R$	x_0^n	$\sqrt{x_0}$ حيث $x_0 \geq 0$	$ x_0 $	حالة $x_0 = 0$ σ / $+\infty$ σ / $+\infty$

الدوال	$n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto \frac{1}{ x }$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$
مجموعة التعريف	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}	\mathbb{R}
النهاية عند $+\infty$	0^+	0^+	0^+	غير موجود	غير موجود
النهاية عند $-\infty$	غير موجود	غير موجود	0^+	غير موجود	غير موجود
النهاية عند x_0 $x_0 \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x_0}}$ $x_0 > 0$	$\frac{1}{ x_0 }$ $x_0 \neq 0$	$\frac{1}{ x_0 }$ $x_0 \neq 0$	$\sin x_0$	$\cos x_0$

للحفظ

إذا كان $P(x)$ كثير الحدود فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ من أجل

كل x_0 من \mathbb{R} .

عند $-\infty$ أو $+\infty$ ، الكثير الحدود له نفس نهاية وحيد الحد الأعلى درجة في عبارته.

إذا كان $Q(x)$ كسر ناطق فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0)$ من أجل كل x_0 من D_Q .

عند $-\infty$ أو $+\infty$ ، الكسر الناطق له نفس نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأعلى درجة في بسطه على وحيد الأعلى درجة في مقامه.

◆ النهايات والمقارنة

الرمز α يشير إلى عدد حقيقي، $-\infty$ أو $+\infty$. l عدد حقيقي، f, g, h ثلاث دوال عددية معرفة على المجال I . (جوار α)

إذا كان |من أجل كل x من I ، $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = l$ فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$. (اخضر)

إذا كان |من أجل كل x من I ، $g(x) \leq f(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$.

إذا كان |من أجل كل x من I ، $f(x) \leq h(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$.

◆ العمليات على النهايات

الرمز α يشير إلى عدد حقيقي، $-\infty$ أو $+\infty$. l و l' عدنان حقيقيان.

f و g دالتان عدديتان معرفتان على المجال I . (جوار α)

نهايات المجموع						
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	l	l	l
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	l'
غير معينة		$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l+l'$

نهايات الجداء

0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	l	نهاية f هي
$\pm \infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	l'	نهاية g هي
غير معينة	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l \times l'$	نهاية $(f \times g)$ هي

نهايات حاصل القسمة (في حالة نهاية g غير معدومة)

$\pm \infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	l	l	نهاية f هي
$\pm \infty$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm \infty$	$l' \neq 0$	نهاية g هي
غير معينة	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\frac{l}{l'}$	نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي

نهایات حاصل القسمة (في حالة نهاية g معدومة)

0	$l < 0$ أو $-\infty$	$l < 0$ أو $-\infty$	$l > 0$ أو $+\infty$	$l > 0$ أو $+\infty$	نهاية f هي
0	0^-	0^+	0^-	0^+	نهاية g هي
غير معينة	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي

نهایات شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

المستقيمات المقاربة

الرمز α يشير إلى $+\infty$ أو $-\infty$. f و g دالتان عدديتان معرفتان على الأقل على أحد المجالين $]-\infty; a[$ أو $]a; +\infty[$ (C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانيان.

تعريف

التمثيلان البيانيان (C_f) و (C_g) متقاربان عند α يكافئ

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) - g(x)] = 0$$

نتائج

المستقيم الذي معادلته $y = mx + p$ مقارب للمنحنى (C_f) عند α معناه

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) - (mx + p)] = 0$$

إذا كان $m \neq 0$ فإن المستقيم المقارب يكون مائلاً.إذا كان $m = 0$ فإن المستقيم المقارب معادلته $y = p$ يكون موازاً

لحامول محور الفواصل.

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ فإن المستقيم الذي معادلته $x = x_0$ مقاربللمنحنى (C_f) ويوازي حامل محور الترتيب.

* الاستمرارية

تعريف

دالة عددية معرفة على المجال المفتوح I من R و x_0 عنصر من I .• f مستمرة عند x_0 معناه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.• f مستمرة عند x_0 من اليمين معناه $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.• f مستمرة عند x_0 من اليسار معناه $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

مبرهنة

 f مستمرة عند x_0 معناه f مستمرة عند x_0 من اليمين ومن اليسار.

♦ امتداد دالة بالاستمرار

 f دالة معرفة ومستمرة على المجموعة D و x_0 عدد حقيقي حيث: $x_0 \notin D$ و l عدد حقيقيإذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ، فإن الدالة g المعرفة على $D \cup \{x_0\}$ بما يلي: $g(x) = f(x)$ من أجل $x \in D$ و $g(x_0) = l$ تدعى امتداداً للدالة f بالاستمرار عند x_0 .

للحفظ

 f و g دالتان مستمرتان على المجموعة D (عند كل x_0 من D).• الدالتان $(f + g)$ و $(f \times g)$ مستمرتان على D .• إذا كانت g لا تعلم على D فإن الدالتان $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ مستمرتان على D .• إذا كانت u مستمرة عند x_0 وكانت v مستمرة عند $u(x_0)$ فإنالدالة $(v \circ u)$ مستمرة عند x_0 .• الدوال: $|\sqrt{f}|$ ، $|\sin f|$ ، $|\cos f|$ ، $|\tan f|$ مستمرة على مجموعة تعريفها.

الدالة $h \mapsto f(x_0) + hf'(x_0)$ تدعى تقريب تآلفي للدالة $f(x_0 + h)$ بجوار 0 .

للحفظ

لدينا $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ونكتب كذلك

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{بوضع } x - x_0 = h)$$

الكتابة النفاضلية $dy = f'(x)dx$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{لدينا}$$

بالشكل: $\Delta_x = h$ و $\Delta_y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ تكتب العلاقة (1) بالشكل:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x} + \theta(h) \right) \quad \text{أي } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \theta(\Delta_x) = 0 \quad \text{و } \Delta_y = f'(x_0)\Delta_x - \Delta_x\theta(\Delta_x)$$

عندما يكون المقدار Δ_x قريب من الصفر، يكون لدينا: $\Delta_y \approx f'(x_0)\Delta_x$ ونرمز بـ: $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = f'(x_0)$

ويمكننا أن نستعمل الرمز: $\frac{\Delta_f}{\Delta_x}$ بدل الرمز f' . ونكتب: $f'(x_0) = \frac{\Delta_f}{\Delta_x}(x_0)$

الدالة المشتقة

تعريف

f دالة عددية معرفة على المجموعة D وقابلة للاشتقاق على المجموعة D'

(عند كل قيمة x_0 من D') حيث: $D' \subset D$

الدالة التي ترفق بكل عدد x من D' ، العدد المشتق $f'(x)$ تدعى الدالة المشتقة الأولى

(أو المشتقة) للدالة f . ويرمز لها: f' .

نتحة

إذا كانت الدالة f' بدورها تقبل الاشتقاق على D''

حيث: $D'' \subset D'$ ، فباستعمال التعريف السابق توجد الدالة المشتقة للدالة f' يرمز

لها f'' وتدعى الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

بنفس الطريقة يمكننا الحديث عن الدالة المشتقة الثالثة، الرابعة، ... للدالة f .

◆ مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a; b]$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي k من المجال K الذي حداه $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[a; b]$.

ملحوظة: إضافة إلى f مستمرة في $[a; b]$ ، إذا كانت f رتيبة تماماً على $[a; b]$ فإن للمعادلة $f(x) = k$ حلاً وحيداً.

تعمم هذه المبرهنة في حالة f مستمرة على مجال مفتوح أو نصف مفتوح، محدود أو غير محدود، في هذه الحالة حداً للمجال K يمكن أن يكونا نهايات f عند طرفي $[a; b]$.

★ الاشتقاقية

◆ العدد المشتق

تعريف

f دالة عددية معرفة على المجال المفتوح I من R و x_0 عنصر من I .

f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط الثلاثة المتكافئة التالية:

• يوجد عدد حقيقي k و دالة ε معرفة على I بحيث:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \quad I \text{ من } x \text{ كل}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{و}$$

• يوجد عدد حقيقي k و دالة θ معرفة على I بحيث:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hk + h\theta(h), \quad I \text{ من } h \text{ كل}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0 \quad \text{و}$$

• الدالة g المعرفة على $I - \{x_0\}$ بـ: $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تقبل نهاية

محدودة k عند x_0 .

العدد الحقيقي k يدعى العدد المشتق للدالة f عند x_0 ونرمز: $f'(x_0) = k$

مبرهنة

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على المجموعة D ، فإن هذه الدالة مستمرة على D .

عكس هذه المبرهنة غير صحيح

انتبه

◆ معادلة المماس للمنحني

تعريف

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 ، فإن المستقيم Δ الذي

معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يدعى المماس للمنحني الممثل للدالة

f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 . $f'(x_0)$ يدعى معامل توجيه المماس Δ .

ملاحظة: f دالة عددية معرفة على المجال المفتوح I من \mathbb{R} و x_0 عنصر من I .

إذا كانت الدالة g المعرفة على $I - \{x_0\}$ بـ: $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تقبل نهاية

غير محدودة ($+\infty / -\infty$) عند x_0 ، (أو عند x_0^+ / x_0^-).

فإن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 وتمثيلها البياني يقبل مماسا (نصف مماس) عند

النقطة ذات الفاصلة x_0 ، يوازي حامل محور الترتيب.

◆ مشتقات الدوال المألوفة

الدالة	مجموعة تعريفها	مجموعة قابلية اشتقاقها	دالتها المشتقة
$x \mapsto k$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^3$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \mapsto 3x^2$
$n \in \mathbb{N}^* / x \mapsto x^n$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$n \in \mathbb{N}^* / x \mapsto \frac{1}{x^n}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$

الدالة	مجموعة تعريفها	مجموعة قابلية اشتقاقها	دالتها المشتقة
$x \mapsto \sqrt{x}$	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

العمليات على الدوال المشتقة

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجموعة D .

الدالة	الدالة المشتقة	الشروط
$f + g$	$f' + g'$	I
kf	kf'	$k \in \mathbb{R}^*$
fg	$f'g + g'f$	I
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$	D كامل $f \neq 0$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$	D كامل $g \neq 0$
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$	$b \in \mathbb{R} ; a \in \mathbb{R}^*$
$x \mapsto f[h(x)]$	$x \mapsto h'(x) \times f'[h(x)]$	h دالة تقبل الاشتقاق على E حيث: $h(E) \subset D$
f^n	$nf'f^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}^*$ و f لاتعتمد من أجل $n < 0$
\sqrt{f}	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	f موجبة تماما على كامل D

الدوال كثير الحدود والناطقة تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها

* الدوال الأصلية

تعريف

f و F دالتان معرفتان على المجال I .

F دالة أصلية للدالة f على المجال I ، إذا وفقط إذا كانت الدالة F تقبل

الاشتقاق على I ، و دالتها المشتقة هي f .

أي من أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$

للحفظ

مبرهنة: (وجود دوال أصلية لدالة)

كل دالة f مستمرة على المجال I ، تقبل على الأقل دالة أصلية F على I .

خاصة:

• إذا قبلت الدالة f على المجال I دالة أصلية F ، فإن الدالة f تقبل على I عدد غير

مته من الدوال الأصلية كلها من الشكل:

$$x \mapsto F(x) + k \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي}$$

• إذا قبلت الدالة f على المجال I دالة أصلية F ، فإنه من أجل كل ثنائية

$(x_0; y_0)$ حيث $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$ ، توجد دالة أصلية F_0 وحيدة للدالة

f على المجال I والتي تأخذ القيمة y_0 عند x_0 .

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدالة	شروط وجود الدوال الأصلية	الدوال الأصلية / $k \in \mathbb{R}$
$(a \in \mathbb{R}) / x \mapsto a$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + k$
$ x \mapsto x^n$	$n > 0$ من أجل $x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$(n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\})$	$x \in \mathbb{R}_+^*$ أو $x \in \mathbb{R}^*$ من أجل $n < 0$	
$ x \mapsto x^n$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$(n \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z})$		
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	

المشتقة واتجاه تغير الدالة

للحفظ

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I .

f متزايدة تماما على I معناه من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$.

f متناقصة تماما على I معناه من أجل كل x من I ، $f'(x) < 0$.

f ثابتة على I معناه من أجل كل x من I ، $f'(x) = 0$.

ملاحظة: f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a; b]$.

• إذا كان من أجل كل x من $[a; b]$ ، $f'(x) > 0$ فإن f

متزايدة تماما على $[a; b]$.

• إذا كان من أجل كل x من $[a; b]$ ، $f'(x) < 0$ فإن f

متناقصة تماما على $[a; b]$.

* العدد المشتق من اليمين ومن اليسار

f دالة عددية معرفة على المجال المفتوح I من \mathbb{R} و x_0 عنصر من I .

• تقبل الاشتقاق من يمين x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة f المعرفة على $I - \{x_0\}$

بـ: $\rho(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تقبل نهاية محدودة k_1 عند يمين x_0 . ونرمز: $k_1 = f'_d(x_0)$

$f'_d(x_0)$ هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

• تقبل الاشتقاق من يسار x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة f المعرفة على $I - \{x_0\}$

بـ: $\rho(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تقبل نهاية محدودة k_2 عند يسار x_0 . ونرمز: $k_2 = f'_g(x_0)$

$f'_g(x_0)$ هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

مبرهنة

f دالة عددية معرفة على المجال المفتوح I من \mathbb{R} و x_0 عنصر من I .

f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا قبلت الاشتقاق من يمين x_0 ومن

يسار x_0 وكان: $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

تمارين محلولة

النهايات

احسب نهايات الدوال التالية عند أطراف مجالات تعريفها في كل حالة.

الدالة f معرفة على \mathbb{R} بالمستور: $f(x) = -4x^2 + x + 5$

الدالة g معرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بالمستور: $g(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

الدالة h معرفة على \mathbb{R} بالمستور: $h(x) = \frac{3-x}{x^2+2}$

الدالة k معرفة على $]0; +\infty[$ بالمستور: $k(x) = x\sqrt{x + \frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2) = -4(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^2) = -4(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \frac{-16}{0^-} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty \sqrt{+\infty + 0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^3 + x}$$

الكتابة $\sqrt{x^2} = x$ تصح

فقط من أجل $x \geq 0$.

الدوال الأصلية / $k \in \mathbb{R}$	شروط وجود الدوال الأصلية	الدالة
$x \mapsto -\cos x + k$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$
$x \mapsto \sin x + k$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + k$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(ax+b)$ $a \neq 0$
$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax+b) + k$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(ax+b)$ $a \neq 0$
$x \mapsto \cot g x + k$	$l \in \mathbb{Z} / x \in]l\pi; (l+1)\pi[$	$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$
$x \mapsto \tan x + k$	$l \in \mathbb{Z} / x \in \left] \frac{\pi}{2} + l\pi, \frac{\pi}{2} + (l+1)\pi \right[$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

عمليات على الدوال الأصلية

دالة أصنية	الشروط	f, g, f', g' دوال معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال I
af	على I	af' حيث $(a \in \mathbb{R})$
$f+g$	على I	$f'+g'$
fg	على I	$f'g+g'f$
$\frac{1}{f}$	على I حيث $f \neq 0$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f^{n+1}}{n+1}$	على I من أجل $n > 0$ على I حيث $f \neq 0$ من أجل $n < 0$	$n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\} / ff^n$
$\frac{f^{n+1}}{n+1}$	على I حيث $f > 0$	$n \in \mathbb{Q} - \{-1\} / ff^n$
\sqrt{f}	على I حيث $f > 0$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$g \circ f$	على I و $f(I) \subset I$	$(g' \circ f) \times f'$

$$k'(x) = 3(2x^2 + 5)(2x^2 + 5)^2 = 12x(2x^2 + 5)^2, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{(-x^2 + 5)(x+2) - (x+2)(-x^2 + 5)}{(x+2)^2} = \frac{-2x(x+2) - (-x^2 + 5)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x - 5}{(x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(x^2 + x + 2)}{2\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 2}}, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

استعمال مبرهنة القيم المتوسطة

المدالة f معرفة على \mathbb{R} بالدستور: $f(x) = -x^3 - x + 5$

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0; 2]$.

هل هذا الحل وحيد؟

3

الحل: المدالة f مستمرة على \mathbb{R} كونها كثير الحدود، وبخاصة على $[0; 2]$.

ولدينا: $f(0) = 5$ و $f(2) = -5$ وبالتالي: $f(0) \times f(2) < 0$

إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة ($k = 0$)، فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل

حلا في المجال $[0; 2]$.

المدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} كونها كثير الحدود، وبخاصة على $[0; 2]$.

لدينا: $f'(x) = -3x^2 - 1$ ، من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f'(x) < 0$ يعني f

متناقصة تماما على \mathbb{R} وبخاصة على $[0; 2]$. وبالتالي الحل وحيد.

محور تناظر لمنحن دالة

المدالة f معرفة على \mathbb{R} بالدستور: $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بين أن المنحنى الذي معادلته $x = -2$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

4

قابلية الاشتقاق - حساب المشتقات

• ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 في الحالتين:

$$x_0 = 0, f(x) = |x|, \quad x_0 = -1, f(x) = \sqrt{x+1}$$

• عيّن الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية:

$$\bullet \text{ الدالة } g \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ بالدستور: } g(x) = -4x^2 + x + 5$$

$$\bullet \text{ الدالة } h \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ بالدستور: } h(x) = x^2 \cos x$$

$$\bullet \text{ الدالة } k \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ بالدستور: } k(x) = (2x^2 + 5)^3$$

$$\bullet \text{ الدالة } l \text{ معرفة على } \mathbb{R} - \{-1; 1\} \text{ بالدستور: } l(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$\bullet \text{ الدالة } p \text{ معرفة على } \mathbb{R} - \{-2\} \text{ بالدستور: } p(x) = \frac{-x^2 + 5}{x + 2}$$

$$\bullet \text{ الدالة } q \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ بالدستور: } q(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$$

2

الحل: $f(x) = \sqrt{x+1}$ معرفة على $[-1; +\infty[$. إذا ندرس قابلية الاشتقاق من بين -1 فقط.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

يعني أن f لا تقبل الاشتقاق عند -1 . كون النهاية غير محدودة.

$f(x) = |x|$ معرفة على \mathbb{R} . ندرس قابلية الاشتقاق عند 0 من الجهتين.

$$\text{من أجل } h \neq 0 \text{ لدينا: } \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$\text{إذا: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1$$

يعني أن المدالة f تقبل الاشتقاق من بين 0 و تقبل الاشتقاق من يسار 0 وبما أن

$f'_h(0) \neq f'_g(0)$ فإن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 . هندسياً: المنحنى الممثل للمدالة f يقبل

نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$\bullet \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}, g'(x) = -8x + 1$$

$$\bullet \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}, h(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

الحل: (الطريقة 1) نحري تغيير للمعلم من $(0; \bar{1}; \bar{1})$ إلى $(\Omega; \bar{1}; \bar{1})$ حيث: $\Omega(-2; 0)$ وتستخرج معادلة للمنحنى (C_r) في المعلم الجديد، ثم نبين أنها معادلة التمثيل البياني لدالة زوجية. M نقطة من المستوى إحداثياتها $(x; y)$ في المعلم $(0; \bar{1}; \bar{1})$ وإحداثياتها $(X; Y)$ في المعلم $(\Omega; \bar{1}; \bar{1})$.

2. حول حساب النهايات.

أحسب نهايات f عند	الدالة f معرفة بالدستور
$-\infty$ و $+\infty$ و 1 و -1	$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{ x - 1}$
$-\infty$ و $+\infty$ و 1	$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$
$+\infty$ و 2	$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$
$-\infty$ و $+\infty$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}$
$-\infty$ و $+\infty$	$f(x) = x + \sin x$
0	$f(x) = \frac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

3. الدالة f معرفة على المجموعة $[-2; +\infty[\cup]-\infty; -2]$ بالدستور:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$$

اكتب معادلة لمماس المنحنى (C_r) الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة -3 .

أعط معادلة لكل من نصفى المماس للمنحنى (C_r) عند النقطتين ذات الفاصلتين -2 و 2 .

4. المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(0; \bar{1}; \bar{1})$.

الحل: (الطريقة 1) نحري تغيير للمعلم من $(0; \bar{1}; \bar{1})$ إلى $(\Omega; \bar{1}; \bar{1})$ حيث: $\Omega(-2; 0)$ وتستخرج معادلة للمنحنى (C_r) في المعلم الجديد، ثم نبين أنها معادلة التمثيل البياني لدالة زوجية. M نقطة من المستوى إحداثياتها $(x; y)$ في المعلم $(0; \bar{1}; \bar{1})$ وإحداثياتها $(X; Y)$ في المعلم $(\Omega; \bar{1}; \bar{1})$.

$$\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases} \text{ (تستخرج من العلاقة الشعاعية } (\Omega; \bar{1}; \bar{1}) = (\Omega; \bar{1}; \bar{1}) \text{)}$$

$$Y = -(X-2)^2 - 4(X-2) + 1 \text{ معناه } M \in (C_r) \text{ أي } y = -x^2 + 5$$

الكتابة الأخيرة هي معادلة للمنحنى (C_r) في المعلم $(\Omega; \bar{1}; \bar{1})$ نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بالدستور: $g(x) = -x^2 + 5$

الدالة g زوجية كون: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $g(-x) = g(x)$ وبالتالي المستقيم الذي معادلته $x = -2$ هو محور تناظر للمنحنى (C_r) .

(الطريقة 2) نبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $(-2-x) \in \mathbb{R}$ و $(-2+x) \in \mathbb{R}$ و $f(-2+x) = f(-2-x)$ (تحقق من ذلك).

تمارين للتدريب

1. الدالة f معرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{-2\}$ بالدستور: $f(x) = \frac{5x-1}{2+x}$

احسب نهايات f عند أطراف مجالات التعريف، ثم استنتج أن هناك مستقيمتين مقاربتين للمنحنى الممثل للدالة f ، بطلب معادلاتهما.

$$g(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x - 1} \text{ بالدستور: المجموعة } \mathbb{R} - \{1\}$$

يبين أن المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة g .

$$h(x) = \frac{6x^2 - 7x + 3}{2x - 1} \text{ بالدستور: المجموعة } \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

عَيِّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث: من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

7. الدالة f معرفة على المجموعة $R - \{-1\}$ بالدستور: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{(x+1)^2}$

عين الأعداد الحقيقية u, h, c حتى يكون، من أجل كل x من $R - \{-1\}$ ،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$

استنتج الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$ والتي تتعلم من أجل $x = 1$.

8. الدالة f معرفة على المجموعة $R - \{-1; 0; 1\}$ بالدستور: $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^2 - x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

• بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية u, h, c و c بحيث: من أجل كل x

$$f(x) = x + \frac{u}{x} + \frac{h}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \quad R - \{-1; 0; 1\}$$

• ادرس تغيرات الدالة f ، وعين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) وكذا مركز تناظره.

• حل المعادلتين: $f(x) = 0$ و $f(x) = x$ ثم أرسم (C_f) .

• نعتبر الدالة كثير الحدود g المعرفة على R بالدستور:

$$g(x) = x^4 - ax^3 - 6x^2 + ax + 1 \quad \text{و } a \in R$$

تحقق - باستعمال النتائج السابقة حول تغيرات الدالة f - أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل

أربعة حلول حقيقية وذلك مهما كان العدد a .

9. الدالة f_m معرفة على المجموعة R بالدستور: $f_m(x) = \frac{(x+m)(3x+10m)}{(x+2m)^2}$

حيث m وسيط حقيقي

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

ادرس تغيرات الدالة f_m ، وعين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_m) .

ادرس وضعية (C_m) بالنسبة للمستقيم المقارب للمنحنى (C_m) والوازي لحامل محور

القواصل.

ما يمكن القول عن المنحنى (C_0) ؟

• الدالة f معرفة على المجموعة R بالدستور: $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث:

a, b, c و a أعداد حقيقية.

عين الأعداد u, h, c و c حتى يكون: $f(2) = 2, f(4) = -4, f'(4) = 0$.

ادرس تغيرات الدالة f واسم تمثيلها البياني (C_f) في المجال $[0; 8]$.

• عين الدالة g كثير الحدود من الدرجة الثانية، علماً أن المستقيم الذي معادلته

$$y = 2x - \frac{3}{2}$$

وأن $g(2) = 2$.

ادرس تغيرات الدالة g واسم تمثيلها البياني (C_g) في المجال $[0; 8]$.

ادرس الوضعية النسبية للمنحنين (C_f) و (C_g) في المجال $[0; 8]$.

5. الدالة f معرفة على المجموعة $R - \{0\}$ بالدستور: $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

• بين أن الدالة f فردية.

• نسمي g اختصاراً للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

احسب نهايات g عند 0 و عند $+\infty$.

• بين أن الدالة g متزايدة على I .

• نضع: $h(x) = g(x) - x$. أحسب نهاية h عند $+\infty$ وترجم هندسيا النتيجة.

• احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x}$. ما هو مسار المنحنى (C_g) بجوار النقطة ذات الإحداثيات $(0; 1)$ ؟

• أنشئ المنحنين (C_f) و (C_g) .

6. عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة:

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}, \quad I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$$

$$I =]-2; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = x\sqrt{x+2}, \quad I = R \quad \text{و} \quad f(x) = \cos^4 x \sin x$$

$$I = R \quad \text{و} \quad f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x, \quad I = R \quad \text{و} \quad f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$$

3- الدالة الأسية- الدالة اللوغاريتمية

Hard Equation

ما يجب أن يعرف:

الدالة الأسية

تعريف

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة f التي تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} وتحقق

$$f'(x) = f(x) \text{ و } f(0) = 1$$

يرمز لها \exp ونكتب: $f(x) = \exp(x)$ أو $f(x) = e^x$

وعموماً: من أجل k عدد حقيقي، توجد دالة وحيدة f تقبل الاشتقاق

$$\text{على } \mathbb{R} \text{ وتحقق المعادلة } f'(x) = kf(x) \text{ و } f(0) = 1$$

معرفة بالدستور: $f(x) = e^{kx}$

للحفظ

a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^x > 0, \quad e^1 = e, \quad e^0 = 1$$

$$n \in \mathbb{Z} / e^{nx} = (e^x)^n, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$a < b \text{ يكافئ } e^a < e^b, \quad a = b \text{ يكافئ } e^a = e^b$$

الدالة \exp معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

$$(e^x)' = e^x, \quad x \text{ من } \mathbb{R}$$

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على D فإن الدالة e^f تقبل

$$\text{الاشتقاق على } D. \text{ ولدينا: } (e^f)' = f' e^f$$

الدالة \exp متزايدة تماماً على \mathbb{R} . بجوار 0 , $e^h \approx 1 + h$

خواص جبرية

خواص تحليلية

نفرض أن $m \neq 0$. ما هي إحداثيات I_m نقطة تقاطع المنحني (C_m) مع مستقيمه المقارب الأفقي؟

تعرف على مجموعة النقط I_m عندما تتغير m .

10. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. نعتبر المثلث ABC

المتساوي الساقين رأسه الأساسي A ، تحيط به الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

النقطة B تقع فوق محور الفواصل. يرمز H إلى المسقط العمودي للنقطة A على

الحامل (BC) .

العدد الحقيقي α يمثل قياساً بالراديان للزاوية $(\vec{i}; \overline{OB})$ حيث $\alpha \in [0; \pi]$.

• ما هي إحداثيات النقطة B ؟

عبّر عن الطولين BH و AH بدلالة α .

استنتج مساحة المثلث ABC بدلالة α .

• الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; \pi]$ بالدستور: $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$.

أ- عين مشتقة الدالة f ، وبيّن أنه من أجل كل x من المجال $[0; \pi]$ ،

$$f''(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0; \pi]$ ، $f''(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$.

ب- أدرس إشارة العدد $f''(x)$ ، ثم ارسم جدول تغيرات الدالة f .

• بيّن أنه توجد قيمة للعدد α من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر مما يمكن.

تعرف على هذه المساحة العظمى.

• ما هي إذاً طبيعة المثلث ABC ؟

للحفظ

الدالة \ln متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

من أجل a و b عنصران من $]0; +\infty[$ ، $\ln a = \ln b$ ، يكافئ $a = b$.

$\ln a < \ln b$ ، يكافئ $a < b$.

حالة خاصة

$\ln a < 0$ ، يكافئ $0 < a < 1$.

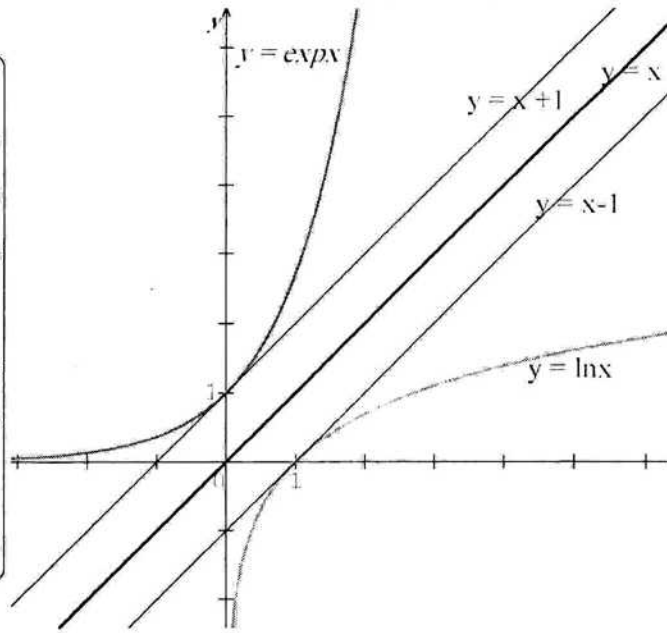
$\ln a > 0$ ، يكافئ $a > 1$.

♦ التمثيل البياني للدالتين الأسية واللوغاريتم النييري

للدالتين الأسية واللوغاريتم النييري تمثيلان بيانيان متناظران بالنسبة

للمستقيم الذي معادلته $y = x$ (المصنف الأول) في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$.



معادلة $y = x + 1$ هي معادلة المستقيم المماس للمنحنى الممثل للدالة \exp عند النقطة ذات الفاصلة 0. معادلة $y = x - 1$ هي معادلة المستقيم المماس للمنحنى الممثل للدالة \ln عند النقطة ذات الفاصلة 1.

★ الدالة اللوغاريتم النييري

تعريف

الدالة اللوغاريتم النييري ويرمز لها \ln هي دالة التقابل العكسي للدالة الأسية، ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماماً x العدد الحقيقي $\ln x$ والذي عدده الأسّي يساوي x .

أي من أجل $x \in \mathbb{R}$ و $y \in]0; +\infty[$: $e^x = y$ (يكافئ $x = \ln y$)
 $e^{\ln y} = y$ و $\ln e^x = x$

للحفظ

خواص حبرية

a و b عدداً حقيقيين موجبان تماماً.

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ •	$\ln e = 1$ ، $\ln 1 = 0$ •
$n \in \mathbb{Z} \mid \ln(a^n) = n \ln a$ •	$\ln ab = \ln a + \ln b$ •
$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ •	$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ •

للحفظ

خواص تحليلية

f دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على D .

- الدالة \ln معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$.
- من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- إذا كانت $f \neq 0$ على D فإن $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$.
- إذا كانت $f > 0$ على D فإن $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$.
- بجوار 0 ، $\ln(1 + h) \approx h$.

للحفظ

a و a' عددان حقيقيان موجبان تماما ويختلفان عن 1.
 x و y عددان حقيقيان.

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^0 = 1, \quad 1^x = 1$$

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^x = \frac{a^x}{a'^x}, \quad (aa')^x = a^x a'^x, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

◆ دالة الجذر النوني

تعريف

n عدد طبيعي غير معدوم.

دالة الجذر النوني، هي الدالة التي نرمز لها $\sqrt[n]{}$ والمعروفة على $[0; +\infty[$
 بـ: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

لدينا: من أجل كل x و y من $[0; +\infty[$ ، $x = y^n$ يكافئ $y = \sqrt[n]{x}$.

للحفظ

x و y عددان من $[0; +\infty[$ ، n و m عددان طبيعيان حيث $n \neq 0$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \text{ يكافئ } x = y \quad / \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \text{ يكافئ } x < y$$

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{m/n}, \quad y \neq 0 \text{ حيث } \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

خواص جبرية

خواص تحليلية

• دالة الجذر النوني $\sqrt[n]{}$ معرفة على $[0; +\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$.

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{1/n-1}, \quad \text{من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

◆ نهايات الدالتين \ln و \exp

للحفظ

الدالة اللوغاريتم النيبيري

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

الدالة الأسية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

في حوار لانهائية، الدالة الأسية تتفوق على دالة القوة ذات الأس الحقيقي،
 وتتفوق دالة القوة ذات الأس الحقيقي على الدالة اللوغاريتم النيبيري

◆ اللوغاريتم العشري

تعريف

دالة اللوغاريتم العشري يرمز لها \log ، ومعرفة على $]0; +\infty[$

$$\log 10 = 1$$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \text{ بما يلي:}$$

◆ الدالة الأسية ذات الأساس a

تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما حيث $a \neq 1$.

الدالة الأسية ذات الأساس a ، (دالة القوة الحقيقية) هي الدالة العددية التي يرمز

$$\exp_a x = e^{x \ln a} \text{ لها والمعروفة على } \mathbb{R} \text{ بـ:}$$

$$\text{ونكتب: من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}, \quad e^{x \ln a} = a^x \text{ (تجاوزاً)}$$

$$\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right) > 0 \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان } f, f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$$

$$D_f = \left]-1; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[\text{ إذا: } x \in \left]-1; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[\text{ أي}$$

$$f, f(x) = \sqrt{\ln x - 1} \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان } x > 0 \text{ و } \ln x - 1 > 0 \text{ أي } x > e \text{ و}$$

$$D_f =]e; +\infty[\text{ إذا: } x > e$$

$$f, f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان } e^x - 1 > 0 \text{ أي } x > 0$$

$$D_f =]0; +\infty[\text{ إذا: } x > 0$$

معادلات ومتراحجات لوغاريتمية وأسية

حل في R المعادلات والمتراحجات التالية.

$\ln\sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$	$\ln(2x+1) = 2\ln(x-1)$	2
$\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$	$(e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0$	
$\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0, e^x < e^{-x} + 1$	$e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0$	

الحل: $\ln(2x+1) = 2\ln(x-1)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2x+1 > 0$ و $x-1 > 0$ أي $x \in]1; +\infty[$

$\ln(2x+1) = 2\ln(x-1)$ تكافئ $(2x+1) = (x-1)^2$ أي $x=0$ أو $x=4$.

بما أن $]1; +\infty[\cap \{0\} = \emptyset$ فإن مجموعة الحلول $S = \{4\}$.

$(e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0$ معرفة على كامل R

$(e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0$ تكافئ $(e^{x+2} - 1) = 0$ كون $(e^{x-1} + 2) \neq 0$

تكافئ $x = -2$ إذا مجموعة الحلول $S = \{-2\}$

$e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0$ معرفة على كامل R

$e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0$ تكافئ $(X^2 - 4X + 3 = 0)$ و $X = e^{3x}$

تمارين محلولة

مجموعة التعريف للدوال اللوغاريتم النسيبي والدوال الأسية

عَيِّن مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x في كل حالة مما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(-3x+9)}{\ln x - 1}, \quad f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$$

$$f(x) = e^{-x^2+1}, \quad f(x) = \ln(\sqrt{2x^2 - 3x}), \quad f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right), \quad f(x) = \sqrt{\ln x - 1}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$$

الحل: $f, f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $(2x^2 - 3x + 1) > 0$

$$D_f = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[\text{ إذا: } x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[\text{ أي}$$

$$f, f(x) = \frac{\ln(-3x+9)}{\ln x - 1} \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان}$$

$$\ln x - 1 \neq 0 \text{ و } x > 0 \text{ و } (-3x+9) > 0$$

$$D_f =]0; e[\cup]e; 3[\text{ إذا: } x > 0 \text{ و } x \neq e \text{ و } x < 3$$

$$f, f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1} \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان } e^{-x} - 1 \neq 0 \text{ أي } -x \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \text{ إذا: } x \neq 0$$

$$f, f(x) = \ln(\sqrt{2x^2 - 3x}) \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان } 2x^2 - 3x > 0 \text{ أي}$$

$$D_f = \left]-\infty; 0\right[\cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[\text{ إذا: } x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

$$f, f(x) = e^{-x^2} \text{ معرفة إذا وفقط إذا كان } x \neq 0 \text{ إذا: } D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

حساب مشتقات لدوال لوغاريتمية أو أسية

عَيِّن الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة.

$$f(x) = x(\ln x^2), f(x) = \ln(-4x^2 + 1), f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln\frac{1}{x} \quad 3$$

$$f(x) = 2^x, f(x) = \ln(e^x - 1), f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 2}, f(x) = \ln\sqrt{1-x^2}$$

الحل: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln\frac{1}{x}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = x - 2 \cdot \frac{-1}{x^2} \times x = x + \frac{2}{x}$$

$f(x) = \ln(-4x^2 + 1)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(-4x^2 + 1)'}{(-4x^2 + 1)^2} = \frac{-8x}{(-4x^2 + 1)^2}$$

$f(x) = x(\ln x^2)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$ ، ولدينا:

$$f'(x) = (\ln x^2)' + (\ln x^2)x = \ln x^2 + 2$$

$f(x) = \ln\sqrt{1-x^2}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $] -1; 1[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{1-x^2}$$

$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 2}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} + 1)(e^x + 2) - (e^x + 2)(e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{3x} + 4e^{2x} - e^x}{(e^x + 2)^2}$$

$f(x) = \ln(e^x - 1)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

تكافئ ($X = e^{3x}$ و $X = 1$ أو $X = 3$)تكافئ ($e^{3x} = 1$ أو $e^{3x} = 3$) تكافئ ($x = 0$ أو $x = \frac{1}{3}\ln 3$)

إذاً: مجموعة الحلول $S = \left\{0; \frac{1}{3}\ln 3\right\}$.

$\ln\sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$ معرفة إذا فقط إذا كان $2x-3 > 0$ و $6-x > 0$ و $x > 0$ أي

$$x \in \left[\frac{3}{2}; 6\right[$$

$\ln\sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$ تكافئ $\sqrt{2x-3} > \frac{6-x}{\sqrt{x}}$ أي $2x^2 - 3x > (6-x)^2$

تكافئ $x^2 + 9x - 36 > 0$ أي $x \in]-\infty; -12[\cup]3; +\infty[$

إذاً: مجموعة الحلول $S = \left[\frac{3}{2}; 6\right[\cap (]-\infty; -12[\cup]3; +\infty[)$ أي $S =]3; 6[$.

معرفة على كامل \mathbb{R} $\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$

تكافئ $\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$ أي $e^{2x+1} \geq e^{3x+1}$ أي $2x+1 \geq 3x+1$ يكافئ $x \leq 0$

إذاً: مجموعة الحلول $S = \mathbb{R}$

$e^x < e^{-x} + 1$ معرفة على كامل \mathbb{R}

$e^x < e^{-x} + 1$ تكافئ $e^{2x} - e^x - 1 < 0$ تكافئ ($e^x = X$ و $X^2 - X - 1 < 0$)

تكافئ $e^x \in \left]0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ أي $x \in \left]-\infty; \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$ و $x \in \left]-\infty; \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$

معرفة إذا فقط إذا كان $\frac{x-1}{2x-3} > 0$ أي $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

تكافئ $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$ أي $\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 1$ أي $(-x+2)(2x-3) \geq 0$ أي $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

وبالتالي: $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] \cap \left(]-\infty; 1[\cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[)\right)$ إذاً: مجموعة الحلول $S = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

الحل: $a = \frac{\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{5}{12}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{7}{4} - \frac{5}{12}} = 9$

$b = \frac{2^{\sqrt{3}} \times 8^{\sqrt{3}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}} = 2^{\sqrt{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \times 2^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$

تمارين للتدريب

1. حل في R المعادلات والمترجمات التالية.

$\frac{e^{2x} + 2e^x - 4}{2 - 3e^x} = -1$ ، $e^{2x} - 4e^{-2x} = 3$ ، $e^x - 2e^{\frac{x}{2}} - 5 = 0$

$(\ln x)^2 - 3 \ln x - 28 = 0$ ، $\ln(x^2 - 1) + 2 \ln 2 = \ln(4x - 1)$

$\ln|x - 1| - \ln 5 \geq \ln \frac{1}{|x + 5|}$ ، $\frac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} \leq 1$ ، $e^{2x^2 - 3x - 5} \geq e^4$

$e^{2x} + e^x > 2$ ، $\ln \sqrt{4 - x^2} \leq \frac{1}{2} \ln 3x$

2. حل في $R \times R$ كلا من الجمل التالية.

$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{2(x+y)} = 36 \end{cases}$ ، $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases}$ ، $\begin{cases} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln(xy) = \frac{7}{2} \end{cases}$ ، $\begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ (\ln x)(\ln y) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} e^x \times e^y = a^2 \\ xy = 1 \end{cases}$ ، $\begin{cases} \ln x - 2 \ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^y} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$

(ناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب a)

$f(x) = 2^x$ وتكتب $f'(x) = e^{x \ln 2}$ ، قابلة للاشتقاق على R ، ولدينا: $f'(x) = (\ln 2)e^{x \ln 2} = 2^x \ln 2$

حساب النهايات

4	<p>احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف للدالة f في كل حالة.</p> <p>f معرفة على $]0; +\infty[$ بالدستور: $f(x) = x - 2 \ln x$</p> <p>f معرفة على R بالدستور: $f(x) = x + 1 - e^x$</p> <p>f معرفة على $]0; +\infty[$ بالدستور: $f(x) = x \ln \left(\frac{1+x}{x}\right)$</p> <p>f معرفة على R بالدستور: $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$</p>
---	--

الحل: $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2 \ln x) = 0 - 2(-\infty) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty(1 - 0) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = +\infty(1 + 0 - \infty) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 - e^x) = -\infty + 1 - 0 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{1+x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1}{1+x} - 1} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(\frac{1+x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \frac{\ln \left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1}{1+x} - 1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 1}\right) = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2X + 1}{X + 1}\right) = 2$

الحساب على القوى الحقيقية والجذور النونية

5	<p>بسّط الكتابتين التاليتين: $b = \frac{2^{\sqrt{3}} \times 8^{\sqrt{3}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}}$ ، $a = \frac{\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}}$</p>
---	--

الدالة f معرفة بالدستور	احسب نهاية f عند
$f(x) = \frac{e^x}{x} - x$	$-\infty$ و $+\infty$ و 0
$f(x) = e^{2x} - e^x$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{3x}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 0
$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+4}$	$+\infty$
$f(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{2x}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 0
$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x) = x - \ln 2e^x - 1 $	$-\infty$ و $+\infty$

4. الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بالدستور: $f(x) = 2 \ln x - (\ln x)^2$

- ادرس تغيرات الدالة f ، ثم حل المعادلة $f(x) = 0$.
- أعط معادلة ديكرتية للمماس (T) للمنحني (C) الممثل للدالة f ، عند النقطة ذات الفاصلة 1.

• أرسم (T) و (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

5. الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بالدستور: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بالدستور: $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$. $f(x)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

• ادرس تغيرات الدالة f . (نستعين بنتائج السؤال الأول)

• أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x$.

• يبين أنه توجد نقطة وحيدة A من المنحني (C_f) يكون المماس عندها للمنحني (C_f) .

يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب تعيين إحداثياتها. أنشئ (Δ) و (C_f) .

6. الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بالدستور: $f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي (P) المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

• يبين أن النقطة A ذات الإحداثيات $(1; -1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) ، ثم أنشئ (C_f) .

• الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بالدستور: $g(x) = \frac{e^x + 1}{-e^x + 1}$

• يبين أن الدالة g فردية، ثم احسب نهاياتها عند أطراف مجالات التعريف.

• تعرّف على اتجاه تغير الدالة g وارسم تمثيلها البياني (C_g) في المستوي (P) .

• الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+ - \{e\}$ بالدستور: $h(x) = \frac{\ln x + 1}{-\ln x + 1}$

• ادرس تغيرات h ، ثم يبين أن h تقابل من المجال $]1; \sqrt{e}]$ نحو $]1; 3]$.

• استخراج عبارة $h^{-1}(x)$ من أجل $x \in [1; 3]$.

7. الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالدستور: $f(x) = e^x - x - 4$

- ادرس تغيرات الدالة f . يبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $x + y + 4 = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .
- أرسم (C_f) و (D) .

8. الدالة العددية المعرفة على $] -1; +\infty[$ بالدستور: $f(x) = x - \ln(x+1)$

- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- ادرس تغيرات الدالة f وارسم تمثيلها البياني. استنتج إشارة الدالة f على المجال $] -1; +\infty[$.
- باستعمال إشارة f ، تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا:

$$\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) < \frac{1}{n}$$

• استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا: $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n < e$

4- المتتاليات العددية

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

* عموميات

تعريف

 n_0 عدد طبيعي معطى.المتتالية العددية u هي كل دالة من N نحو R ، والتي ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر منأو يساوي n_0 ، العدد الحقيقي $u(n)$.المجموعة I حيث $I = \{n : n \in N / n \geq n_0\}$ تدعى مجموعة تعريف المتتاليةالعددية u . (بمجال من N يبدأ من n_0)يرمز كذلك للمتتالية العددية u بـ: $(u_n)_{n \geq n_0}$ أو $(u_n)_{n \in I}$.أو يستعمل الرمز (u_n) مع ذكر مجموعة تعريفها.يرمز كذلك للعدد الحقيقي $u(n)$ بـ: u_n ويدعى الحد العام للمتتالية العددية u .

♦ طريقتي توليد متتالية عددية

تعيّن متتالية عددية بإحدى الطريقتين:

• تعطى عبارة حلها العام، أي عبارة u_n بدلالة n (دستور الدالة f) ونكتب: $u_n = f(n)$.• f تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية u .

• تعطى علاقة بين حدود متعاقبة للمتتالية العددية (تدعى علاقة تراجعية).

- هنا نكتفي بالعلاقة بين حدين متتاليين - ونكتب: $u_{n+1} = f(u_n)$.• f تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية u .• f تحقق أنه من أجل كل x من D_f لدينا: $f(x) \in D_f$ و $u_{n_0} \in D_f$.9. f الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ بالدستور: $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى (P) المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.• ادرس تغيرات الدالة f .• بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x - \ln 3$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .• ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .• ارسم المستقيم (D) والمنحنى (C_f) .• g الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[\cup]-\infty; -1[$ بالدستور: $g(x) = f(|x|)$.• علّل زوجية الدالة g .• باستعمال الدراسة السابقة للدالة f ، ارسم جدولاً كاملاً لتغيرات للدالة g .• اشرح كيف يمكننا رسم التمثيل البياني (C_g) للدالة g انطلاقاً من (C_f) .• ارسم (C_g) .10. f الدالة العددية المعرفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x & / x < 0 \\ f(x) = \cos^2 \pi x & / 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} & / x > 1 \end{cases}$$

• ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f . ثم تغيرات الدالة f وارسم (C_f) .

◆ اتجاه تغيّر متتالية عددية.

(u_n) متتالية عددية معرفة على I حيث $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

و n_0 عدد طبيعي معطى.

(u_n) متزايدة تماماً على I معناه $[$ من أجل كل n من I ، $u_{n+1} - u_n > 0$.

(u_n) متناقصة تماماً على I معناه $[$ من أجل كل n من I ، $u_{n+1} - u_n < 0$.

(u_n) متزايدة على I معناه $[$ من أجل كل n من I ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

(u_n) متناقصة على I معناه $[$ من أجل كل n من I ، $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(u_n) ثابتة على I معناه $[$ من أجل كل n من I ، $u_{n+1} - u_n = 0$.

طريقة

لتعيين اتجاه تغيّر متتالية عددية على I ، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

أو نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1، وهذا فقط في حالة (u_n) موجبة تماماً.

حالة خاصة 1.

من أجل المتتالية المعرفة بـ: $u_n = f(n)$ على المجموعة $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

إذا كانت الدالة f متزايدة (أو متناقصة) على $[n_0; +\infty[$ فإن المتتالية (u_n)

متزايدة (أو متناقصة) على I .

أنتبه: عكس هذه النتيجة غير صحيح

حالة خاصة 2.

من أجل المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = f(u_n)$ على المجموعة

$$I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = f(x) - x$ ، للتعرف على اتجاه

تغيّر المتتالية (u_n) يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x) - x$ على المجموعة D_f .

أو لدينا: $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ ، للتعرف على اتجاه تغيّر

المتتالية (u_n) يكفي دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على D_f .

◆ المتتالية العددية المحدودة

(u_n) متتالية عددية معرفة على I حيث $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ و n_0 عدد طبيعي معطى.

• المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M إذا فقط إذا كان من أجل كل

$$n \text{ من } I, u_n \leq M.$$

• المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي m إذا فقط إذا كان من أجل كل

$$n \text{ من } I, u_n \geq m.$$

• المتتالية (u_n) محدودة إذا فقط إذا كانت المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

◆ متتاليات مرجعية ونهاياتها

المتتاليات المعرفة بمحددها العام n^2 ، n^3 ، \sqrt{n} هي مرجعية نهايتها هي $+\infty$.

المتتاليات المعرفة بمحددها العام $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n^2}$ ، $\frac{1}{n^3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{n}}$ هي مرجعية نهايتها هي 0.

◆ المتتالية المتقاربة والمتتالية المتباعدة

تعريف

المتتالية العددية المتقاربة نحو العدد الحقيقي l هي التي تقبل نهاية

محدودة l عندما ينتهي n إلى $+\infty$.

المتتالية العددية المتباعدة هي المتتالية العددية غير المتقاربة.

طريقة

(u_n) متتالية عددية معرفة على I حيث $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ و

n_0 عدد طبيعي معطى.

• للبرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0. يمكننا أن نبين أنه:

يوجد عدد طبيعي n' بحيث: (إذا كان $n \geq n'$ فإن $|u_n| \leq kv_n$)

حيث: (v_n) متتالية مرجعية متقاربة نحو 0، و $k \in \mathbb{R}$.

• للبرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l . يمكننا أن نبين أن المتتالية

$(u_n - l)$ متقاربة نحو 0. ويمكننا أن نبين كذلك أنه: يوجد عدد طبيعي n'

بحيث: (إذا كان $n \geq n'$ فإن $w_n \leq u_n \leq v_n$)

حيث: (v_n) و (w_n) متتاليتان مرجعيتان متقاربتان نحو 0.

مبرهنة 1

كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة.
كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة.
كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل هي متتالية متقاربة.

المتاليات المتجاورتان

تعريف

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان معناه (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

مبرهنة 2

كل متتاليتين متجاورتين هما متتاليتين متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي l .

ملاحظة

• إذا كانت $(u_n)_{n \in I}$ و $(v_n)_{n \in I'}$ متتاليتان عدديتان متجاورتان، حيث (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإنه، من أجل كل عدد طبيعي n من $I \cap I'$ لدينا: $u_n \leq v_n$.

• إذا كانت $(u_n)_{n \in I}$ و $(v_n)_{n \in I'}$ متتاليتان عدديتان متجاورتان، حيث (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة وكانت لهما نفس النهاية l فإنه، من أجل كل عدد طبيعي n من $I \cap I'$ لدينا: $u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$.

مبرهنة 3

(u_n) متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = f(u_n)$.
إذا كانت (u_n) متقاربة نحو l وكانت الدالة f مستمرة عند l فإن، $f(l) = l$.

المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية عددية معرفة على I حيث $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ و n_0 عدد طبيعي معطى.

• المتتالية (u_n) حسابية حدها الأول u_{n_0} وأساسها r إذا فقط إذا كانت معرفة بـ: $u_{n+1} = u_n + r$ من أجل كل n من I (العلاقة التراجعية)

أو $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ من أجل كل n من I (عبارة الحد العام)

• من أجل كل عددين طبيعيين n و p من I ، لدينا: $u_n = u_p + (n - p)r$

• من أجل كل عددين طبيعيين n و p من I حيث: $p \leq n$ ،

لدينا: $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_n + u_p)$

• $(n - p + 1)$ يمثل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من u_p إلى u_n .

• التمثيل البياني للمتتالية الحسابية (u_n) هو مجموعة النقط $M(n; u_n)$ التي تنتمي إلى

المستقيم الذي معامل توجيهه الأساس r .

المتتالية الهندسية

(u_n) متتالية عددية معرفة على I حيث $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ و n_0 عدد طبيعي معطى.

• المتتالية (u_n) هندسية حدها الأول u_{n_0} وأساسها q إذا فقط إذا كانت معرفة بـ:

• $u_{n+1} = u_n \times q$ من أجل كل n من I (العلاقة التراجعية)

أو $u_n = u_{n_0} \times q^{(n - n_0)}$ من أجل كل n من I (عبارة الحد العام)

• من أجل كل عددين طبيعيين n و p من I ، لدينا: $u_n = u_p \times q^{(n - p)}$

• من أجل كل عددين طبيعيين n و p من I حيث: $p \leq n$ ،

لدينا: $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{(n - p + 1)}}{1 - q}$ حيث $q \neq 1$.

• $(n - p + 1)$ يمثل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من u_p إلى u_n .

نهايات متتالية هندسية:

إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ ، إذا كان $q = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ ، إذا كان $q \leq -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ غير موجودة

◆ البرهان بالتراجع

P_n خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n من المجموعة $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ حيث n_0 عدد طبيعي معطى.

للبهان بالتراجع على أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل n من I ، تتبع المراحل الثلاث التالية:

① نتحقق من صحة الخاصية P_{n_0} (هذه المرحلة تدعى بداية التراجع)

② نفرض أن الخاصية P_n صحيحة إلى غاية الرتبة k حيث: $k \geq n_0$.

(هذه المرحلة تدعى فرضية التراجع)

③ نبرهن أن الخاصية P_{k+1} صحيحة. (هذه المرحلة تدعى برهان التراجع)

(المرحلتين ② و ③ تدعى استلزام التراجع)

تمارين محلولة

البرهان بالتراجع

برهن بالتراجع صحة العبارتين التاليتين.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad n \text{ من } N^*$$

من أجل كل n من N ، $3^{2n} - 2^n$ يقبل القسمة على 7.

$$\text{الحل: من أجل كل } n \text{ من } N^*, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

نتحقق من صحة الخاصية P_1 . $P_1: 1^2 = \frac{1}{6}1(1+1)(2 \times 1 + 1)$ محققة

نفرض صحة الخاصية P_n إلى الرتبة k حيث: $1 \leq k$. أي أن:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \quad \text{صحيحة فرضاً.}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \quad \text{أي نبيّن أن:}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

من أجل كل n من N ، $3^{2n} - 2^n = 7\alpha$ ، $\alpha \in N / P_n$

نتحقق من صحة الخاصية P_0 . $P_0: 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 7 \times 0$ محققة

نفرض صحة الخاصية P_n إلى الرتبة k حيث: $k \geq 0$. أي أن:

$$\alpha \in N / \quad 3^{2k} - 2^k = 7\alpha \quad \text{صحيحة فرضاً.}$$

نبرهن صحة الخاصية P_{k+1} أي نبيّن أن: $\beta \in N / \quad 3^{2(k+1)} - 2^{k+1} = 7\beta$

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 2^{k+1} &= 3^2 \times 3^{2k} - 2 \times 2^k = 9(7\alpha + 2^k) - 2 \times 2^k \\ &= 63\alpha + 7 \times 2^k = 7(9\alpha + 2^k) = 7\beta \end{aligned}$$

لدينا: $\beta = (9\alpha + 2^k) \in N$ حيث

اتجاه تغير متتالية عددية

تعرف على اتجاه تغير المتتالية العددية في كل حالة.

$$u_n = \frac{n+4}{n+2} \quad (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة:}$$

$$k_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \quad (k_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة:} \quad 2$$

(v_n) متتالية عددية معرفة على N بحدها الأول $v_0 = 1$ والعلاقة التراجعية:

$$v_{n+1} = 2 + \ln v_n$$

الحل: (u_n) متتالية عددية معرفة على N بالعلاقة: $u_n = \frac{n+4}{n+2}$

لدينا: من اجل كل n من N ، $u_{n+1} - u_n = \frac{n+5}{n+3} - \frac{n+4}{n+2} = \frac{-2}{(n+2)(n+3)} < 0$

إذاً المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على N .

• متتالية عددية معرفة على N بالعلاقة: $k_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

(يمكن العمل بطريقة المثال الأول كما يمكن العمل بالطريقة التالية)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالدستور $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ وندرس اتجاه تغيراتها فقط على \mathbb{R}_+ .

من أجل كل x من \mathbb{R}_+ ، $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$ ، f متزايدة تماماً على \mathbb{R}_+ ؟

وبالتالي المتتالية (k_n) متزايدة تماماً على N .

• (v_n) متتالية عددية معرفة على N بعدها الأول $v_0 = 1$ والعلاقة التراجعية: $v_{n+1} = 2 + \ln v_n$ للتعرف على تغيراتها نتبع ما يلي:

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}_+ بالدستور $f(x) = 2 + \ln x$ وندرس اتجاه تغيراتها على \mathbb{R}_+^* .

اتجاه تغير الدالة f نفسه اتجاه تغير الدالة \ln كون: $f = \ln + 2$ إذاً f متزايدة تماماً على \mathbb{R}_+^* .

لدينا: $(v_{n+1} - v_n) = f(v_n) - f(v_{n-1})$ نعلم إذاً على اتجاه تغير الدالة f وعلى البرهان بالتراجع لمقارنة v_{n+1} و v_n .

$v_0 = 1$ و $v_1 = 2$ أي $v_1 > v_0$ (بداية التراجع)

نفرض ان $v_{k+1} > v_k$ حيث $k \in N$ (فرضية التراجع)

وبما أن f متزايدة تماماً على \mathbb{R}_+^* فإن $v_{k+1} > v_k$ تستلزم $f(v_{k+1}) > f(v_k)$ أي

$v_{k+2} > v_{k+1}$ (برهان التراجع)

إذاً: من اجل كل n من N ، $v_{n+1} > v_n$ وبالتالي: (v_n) متزايدة تماماً على N .

دراسة تقارب متتالية عددية

• بين أن المتاليات العددية التالية متقاربة.

• (u_n) معرفة على N^* بالعلاقة: $u_n = \frac{n+4}{n^2}$

• (v_n) معرفة على N بالعلاقة: $v_n = \frac{n^2-1}{n^2-n+2}$

• (k_n) معرفة على N بالعلاقة: $k_n = \frac{n-11}{2^n}$

• (w_n) معرفة على N بالعلاقة: $w_n = \frac{3^n+2^n}{4^n-5^n}$

• بين أن المتتالية (h_n) المعرفة على N بالعلاقة: $h_n = \frac{n^3-1}{n^2+2}$ متباعدة

3

الحل: (u_n) معرفة على N^* بالعلاقة: $u_n = \frac{n+4}{n^2}$

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بالدستور $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذاً: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ، وبالتالي، (u_n) متقاربة نحو 0.

• (v_n) معرفة على N بالعلاقة: $v_n = \frac{n^2-1}{n^2-n+2}$. نعتبر الدالة f المعرفة على

\mathbb{R} بالدستور $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x+2}$. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

إذاً: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$. وبالتالي، (v_n) متقاربة نحو 1.

• (k_n) معرفة على N بالعلاقة: $k_n = \frac{n+11}{2^n}$

نلاحظ أنه: من اجل كل n من N ، $\frac{n+11}{2^n} > 0$. معناه أن المتتالية (k_n) محدودة من الأسفل.

ولدينا: $k_{n+1} - k_n = \frac{1}{2^{n+1}}(n+12-2n-22) = -\frac{n+10}{2^{n+1}} < 0$

المتتالية الهندسية

نعرف المتتاليتين (u_n) و (v_n) على المجموعة N بـ: $u_0 = 1$ ،

$$v_0 = 2 \text{ و من أجل كل } n \text{ من } N ،$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

• نضع: $w_n = v_n - u_n$ من أجل كل n من N .

• بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين نهايتها والتعبير w_n عن بدلالة n .

• عبّر عن العددين $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n ، واستنتج

اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

• بين أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية l .

• نضع: $l_n = 3u_n + 10v_n$ من أجل كل n من N . بين أن المتتالية

(l_n) ثابتة واستنتج قيمة l .

5

الحل: واضح أن (w_n) متتالية عددية كمجموع المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

من أجل كل n من N ،

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15}$$

$$= \frac{2}{15} w_n$$

يعني أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{2}{15}$ وحدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 1$

بما أن $\frac{2}{15} \in]-1; 1[$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ ، ولدينا من أجل كل n من N ،

$$w_n = w_0 \left(\frac{2}{15}\right)^n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$$

من أجل كل n من N ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} = \frac{2}{3} w_n$ ،

$$\text{و } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5} = -\frac{1}{5} w_n$$

(k_n) متناقصة تماما على N .

كون المتتالية (k_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل ، فهي متقاربة.

(w_n) معرفة على N بالعلاقة: $w_n = \frac{3^n + 2^n}{4^n - 5^n}$ ، ولدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n \right)}{5^n \left(\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1} = \frac{0+0}{0-1} = 0$$

يعني أن (w_n) متقاربة نحو 0.

المتتالية (h_n) المعرفة على N^* بالعلاقة: $h_n = \frac{n^3 - 1}{n^2 + 2}$ متباعدة كون

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^2} = +\infty \text{ (نهاية غير محدودة).}$$

المتتاليتان المتجاورتان

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على N^* بـ:

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad 4$$

بين أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

الحل: لدينا من أجل كل n من N ،

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

$$\text{و لدينا من أجل كل } n \text{ من } N ، v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

يعني أن (u_n) متزايدة تماما على N و أن (v_n) متناقصة تماما على N .

وكذلك لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ إذا المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

بما أنه من أجل كل n من N ، $w_n = \left(\frac{2}{15}\right)^n > 0$ ، فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ و $v_{n+1} - v_n < 0$.

أي (u_n) متزايدة تماماً على N و (v_n) متناقصة تماماً على N .

حسب ما سبق لدينا (u_n) متزايدة تماماً على N و (v_n) متناقصة تماماً على N و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

المتالتين (u_n) و (v_n) متجاورتان، وبالتالي فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية l .

من أجل كل n من N ، $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = 3 \frac{u_n + 2v_n}{3} + 10 \frac{u_n + 4v_n}{5} = t_n$ ، يعني أن المتتالية (t_n) ثابتة.

$$\text{إذاً: } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_0 = 23$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3u_n + 10v_n) = 3l + 10l = 13l$$

$$\text{منه } 13l = 23 \text{ أي } l = \frac{23}{13}$$

تمارين للتدريب

1. نقبل أن الكثير حدود ذو المعاملات الحقيقية $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ يحقق

$$P(x+1) - P(x) = x^2 \quad \text{من أجل كل } x \in \mathbb{R}$$

• بلون تعيين العاديين u و b أحسب $P(0)$ ، $P(1)$ ، $P(-1)$. احسب إذا العاديين a و b .

• برهن بالتراجع أنه: من أجل كل n من N ، $P(n)$ عدد طبيعي.

• نضع: $S_1 = 1$ و من أجل كل n من N ، $S_n = 1 + 2^2 + \dots + n^2$ ، بين أن

$$S_n = P(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

• (u_n) متتالية معرفة على N و $u_0 = 0$ و من أجل كل n من N ، $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

• برهن بالتراجع أنه: من أجل كل n من N ، المتتالية (u_n) موجبة.

• اكتشف وبرهن بالتراجع اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in N}$.

2. (u_n) متتالية عددية معرفة على N بـ: $u_0 = 8$ و من أجل كل n من N ،

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n}$$

• مثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الدالة $f: x \mapsto \frac{5x-4}{x}$

والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

• مثل بيانيا الحدود u_0, u_1, u_2 . هل يمكننا التوقع بتقارب المتتالية (u_n) ؟

• بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل، ثم عيّن نهايتها.

3. من أجل كل n من $N - \{0, 1\}$ ، نعرّف على المجال $]0, +\infty[$ الدالة f_n

$$f_n(x) = x^n(2 \ln x - 1)$$

• عيّن الدالة المشتقة f_n' ، ثم بين أنما تنعدم مرة واحدة على المجال $]0, +\infty[$ عند العدد الحقيقي α_n يطلب تعيينه.

• بين أنه من أجل كل n من $N - \{0, 1\}$ ، $1 \leq \alpha_n < \sqrt{e}$.

• ادرس اتجاه تغير المتتالية العددية (α_n) ، ثم حدد سلوكها بجوار $+\infty$.

4. (u_n) متتالية عددية موجبة معرفة على N^* بـ: $u_1 = 1$ و من أجل كل n

$$n^2 u_n^2 - (n-1)^2 u_{n-1}^2 = n \quad \text{من } N^* - \{1\}$$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على N^* بـ: $v_n = n^2 u_n^2$. عيّن v_n بدلالة n واستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعيّن نهايتها.

5. (u_n) متتالية معرفة على N بـ: $u_0 = -1$ و من أجل كل n من N ،

$$u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$$

• بين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

• $(v_n)_{n \in N}$ متتالية معرفة بـ: $v_n = \frac{-1}{3 - u_n}$ بين أن المتتالية (v_n) حسابية، يطلب

تعيين حدها الأول وأساسها.

أحسب v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم أوجد نهاية (u_n) .

6. (u_n) متتالية معرفة على N^* بـ: $u_1 = 7$ ومن أجل كل n من N^* ،

$$u_{n+1} = au_n + 5 \quad .a \in \mathbb{R}$$

نضع: من أجل كل n من N^* ، $v_n = u_n - 6$

• عيّن العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

• فيما يلي نعتبر $a = \frac{1}{6}$ ، احسب إذن v_n بدلالة n ثم نهاية (v_n) .

• نضع: $S_n = \sum_{i=1}^n v_i$ ، أحسب S_n بدلالة n ، وادرس تقارب المتتالية $(S_n)_{n \in N^*}$.

ثم احسب نهايتها.

7. نعرّف متتاليتين عدديتين u و v بـ: $u_1 = 1$ و $v_1 = 12$

• ومن أجل كل n من N^* ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ و $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$

• من أجل كل n من N^* نضع: $w_n = v_n - u_n$ بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

• أحسب w_1 ثم عبّر عن w_n بدلالة n ، أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

• بين أن المتتالية u متزايدة وأن المتتالية v متناقصة، بالاستعانة بالسؤال الأول.

• ماذا تستنتج عن المتتاليتين u و v ؟

• من أجل كل n من N^* نضع: $k_n = 8v_n + 3u_n$ بين أن المتتالية (k_n) ثابتة.

• استنتج نهايتي كلا u و v .

8. g الدالة المعرفة على $]-3; +\infty[$ بالدستور: $g(x) = \ln(x+3)$

• ادرس تغيرات الدالة g .

• المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من N ،

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

• باستعمال السؤال الأول — تعرّف على اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

• بين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2. هل هي متقاربة؟ تعرّف على $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

• المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $v_0 = 2$ ومن أجل كل n من N ، $v_{n+1} = g(v_n)$

• بين أن المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1. هل هي متقاربة؟ تعرّف على $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

• بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ ، استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

• الدالة المعرفة على \mathbb{R} بالدستور: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ و h الدالة المعرفة

$$h(x) = f(x) - \frac{x}{2}$$

• ادرس تغيرات الدالة h ، واستنتج إشارة العدد $h(x)$ حسب قيم x .

• المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $w_0 = 1$ ومن أجل كل n من N ،

$$w_{n+1} = f(w_n)$$

• بين أنه: من أجل كل n من N ، $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n$ ، واستنتج أن: $0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

• تعرّف على $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

9. المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل n من N ، $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$

• بين أنه: من أجل كل n من N ، $0 \leq u_n \leq 3$

• واستنتج أن هذه المتتالية (u_n) معرفة فعلا على N .

• نضع: $a_n = u_{2n}$ و $b_n = u_{2n+1}$ من أجل كل n من N .

• ادرس اتجاه تغير المتتاليتين العدديتين (a_n) و (b_n) .

• بين أنه: من أجل كل n من N ، $b_n \leq 1 \leq a_n$

• استنتج أن المتتالية (u_n) إذا تقاربت فهي تقارب نحو 1.

10. المتتالية العددية المعرفة بـ: $k_0 = 1$ ومن أجل كل n من N ،

$$k_{n+1} = \sin k_n$$

• بالاستعانة بالحاسبة، أعط تخميناً حول سلوك المتتالية (k_n) .

• بين أنه: من أجل كل n من N ، $k_n \in [0; 1]$

• ادرس إشارة الدالة $x \mapsto x - \sin x$ على المجال $[0; 1]$ واستنتج اتجاه تغير المتتالية (k_n) .

• ماذا يمكننا أن نستنتج فيما يخص المتتالية (k_n) ؟

5- الحساب التكاملي

Hard Equation

ما يجب أن يعرف:

★ التكامل المحدود

تعريف

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و F دالة أصلية لها على

المجال I . ليكن a و b عدداً من I .

التكامل (من a إلى b) للدالة f هو العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$.

ونرمز: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

★ خواص التكامل المحدود

f و g دالتان مستمرتان على المجال I . a, b, c أعداد من I .

◆ علاقة شال

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

◆ الخطية

$$k \in \mathbb{R} / \int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

◆ المتباينات والتكامل المحدود

في حالة $a \leq b$: إذا كان من أجل كل x من المجال $[a; b]$ ، فإن $f(x) \geq 0$ فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

في حالة $a < b$: إذا كان من أجل كل x من المجال $[a; b]$ ، فإن $f(x) > 0$ فإن $\int_a^b f(x) dx > 0$

وعموماً

في حالة $a \leq b$: إذا كان من أجل كل x من المجال $[a; b]$ ، فإن $f(x) \geq g(x)$ فإن

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

في حالة $a < b$: إذا كان من أجل كل x من المجال $[a; b]$ ، فإن $f(x) > g(x)$ فإن

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$$

◆ القيمة المتوسطة

إذا كان $a < b$ فإن القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$ هو العدد الحقيقي

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

◆ حصر القيمة المتوسطة

في حالة $a < b$: إذا كان من أجل كل x من المجال $[a; b]$ ، فإن $m \leq f(x) \leq M$ فإن

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

★ التكامل بالتجزئة

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I ، و المشتقتين f' و g' مستمرتين

على المجال I . a و b عدداً من I .

$$\text{لدينا: } \int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx$$

مبرهنة 1

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال I فإنه من أجل كل

عدد a من I ، الدالة F المعرفة بـ: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ هي

الدالة الأصلية للدالة f على المجال I والتي تعتمد عند a .

* حساب المساحات

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نضع: $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و $OIKJ$ مستطيل. مساحة المستطيل $OIKJ$ تمثل وحدة القياس للمساحات في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. ونرمز: $u.a$

♦ التفسير الهندسي للتكامل المحدود

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x . a و b عدنان من I حيث: $a \leq b$. التكامل من a إلى b للدالة $|f|$ هو المساحة A للحيز المستوي المحصور بين المنحني (C_f) الممثل للدالة f وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$.

• في حالة $f \geq 0$ في المجال $[a; b]$: لدينا $A = \int_a^b f(x) dx (u.a)$

• في حالة $f \leq 0$ في المجال $[a; b]$: لدينا $A = -\int_a^b f(x) dx (u.a)$

♦ مساحة الحيز المحصور بين منحنيين

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a; b]$. (C_f) و (C_g) تمثيلهما البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$ يعطى بـ:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx (u.a)$$

♦ حساب الحجم

فضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نضع: $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ، $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. قطع المستقيمة $[OI]$ ، $[OJ]$ ، $[OK]$ هي أضلاع في متوازي المستطيلات الذي حجمه مثل وحدة القياس للحجوم.

جسم S محدد بالمستويين اللذين معادلتهما: $z = a$ و $z = b$. حيث: $a \leq b$

كل مستو معادلته $z = x$ حيث: $x \in [a; b]$ يقطع الجسم S وفق مقطع مستو مساحته $s(x)$ (وحدة مساحة). إذا كانت الدالة s مستمرة على المجال $[a; b]$ فإن الحجم V للجسم S يعطى بالعلاقة:

$$V = \int_a^b s(x) dx \quad (\text{وحدة الحجم}).$$

نتيجة: f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ و (C_f) تمثيلها البياني.

Γ الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمتين $x = a$ و $x = b$.

حجم الجسم الدوراني المولد بدوران Γ حول محور الفواصل يعطى بالعلاقة: $V = \int_a^b \pi f(x) dx$.

تارين محلولة

حساب التكاملات

علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية:

$$\int_e^1 x \ln x dx, \int_2^3 e^{1-2x} dx, \int_2^0 t(t^2 - 1) dt, \int_{-1}^2 (2x^3 - x + 2) dx$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx, \int_x^{\pi/2} 2 \cos u \sin^2 u du$$

1

$$\text{الحل: } \int_{-1}^2 (2x^3 - x + 2) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = (8 - 2 + 4) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 \right) = 12$$

$$\int_2^0 t(t^2 - 1) dt = \frac{1}{2} \int_2^0 (t^2 - 1)'(t^2 - 1) dt = \frac{1}{4} \left[(t^2 - 1)^2 \right]_2^0 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -2$$

$$\int_2^{-3} e^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_2^{-3} -2e^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{1-2x} \right]_2^{-3} = -\frac{e^7}{2} + \frac{e^{-3}}{2}$$

$\int_e^1 x \ln x dx$ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: $f(x) = \ln x$ و $g'(x) = x$

$$\text{ينتج أن: } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ و } g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_e^1 x \ln x dx = \int_e^1 f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_e^1 - \int_e^1 g(x)f'(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_e^1 - \frac{1}{2} \int_e^1 x dx$$

$$= -\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(1 - e^2) = -\frac{1}{4}(1 + e^2)$$

$$\int_{\pi}^{\pi/2} 2 \cos u \sin^2 u du = 2 \int_{\pi}^{\pi/2} (\sin u)' \sin^2 u du = 2 \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_{\pi}^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

نكامل بالتجزئة. لدى نضع: $f(x) = x$ و $g'(x) = \sin x$

ينتج أن: $f'(x) = 1$ و $g(x) = -\cos x$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} g(x)f'(x) dx$$

$$= [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$$

حساب التكاملات

علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية:

$$\int_0^{\pi} e^t \sin t dt, \quad \int_0^1 \ln(t+2) dt, \quad \int_1^2 \ln t dt$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt, \quad \int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt$$

2

الحل: $\int_1^2 \ln t dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$

$$\int_1^2 \ln t dt = [u(t)v(t)]_1^2 - \int_1^2 u'(t)v(t) dt = [t \ln t]_1^2 - [t]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t) = \ln(t+2) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t+2} \\ v(t) = t+2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \ln(t+2) dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt = [(t+2) \ln(t+2)]_0^1 - \int_0^1 dt$$

$$= 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$$

$I = \int_0^{\pi} e^t \sin t dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \sin t \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi} e^t \sin t dt = [u(t)v(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(t)v(t) dt = [-e^t \cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^t \cos t dt$$

$$= e^{\pi} + 1 + J$$

نحسب من جديد التكاملي $J = \int_0^{\pi} e^t \cos t dt$ بالتجزئة. نضع $\begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = \cos t \end{cases}$

$$\begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = \sin t \end{cases}$$

$$J = \int_0^{\pi} e^t \cos t dt = [f(t)g(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(t)g(t) dt$$

$$= [e^t \sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^t \sin t dt = -I$$

ينتج بالعودة إلى الحساب الأول: $I = e^{\pi} + 1 - I$ وبالتالي: $I = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

$K = \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \cos 2t \end{cases}$

$$\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases}$$

$$K = \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt = [u(t)v(t)]_{\pi}^0 - \int_{\pi}^0 u'(t)v(t) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^t \sin 2t \right]_{\pi}^0 - \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 e^t \sin 2t dt = -\frac{1}{2} L$$

نحسب من جديد التكاملي $L = \int_{\pi}^0 e^t \sin 2t dt$ بالتجزئة. نضع $\begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = \sin 2t \end{cases}$

وبما أن: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right) = 0$ فإن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ)

معادلته $y = -x$ عند $+\infty$ و $-\infty$.

الحيّز هو مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث:

$$(-x \leq y \leq \frac{-x^3+x}{x^2+1} \text{ و } 0 \leq x \leq 2) \text{ أو } (\frac{-x^3+x}{x^2+1} \leq y \leq -x \text{ و } -2 \leq x \leq 0)$$

مساحتها هي (u.a) $\int_0^2 [y - (-x)] dx + \int_{-2}^0 [-x - y] dx$

$$\int_{-2}^0 \frac{-2x}{x^2+1} dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (u.a) = [\ln(x^2+1)]_{-2}^0 - [\ln(x^2+1)]_0^2$$

وهي: $= 2 \ln 5 \quad (u.a)$

حساب مساحة الحيّز المحصور بين منحنين

f و g الدالتان المعرفتان على R بـ: $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$

احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنين (C_f) و (C_g) الممثلين

للدالتين f و g وبالمستقيمين اللذين معادلتهما $x = \pi$ و $x = 0$.

4

الحل: مساحة الحيّز تعطى بالتكامل الحدود: (u.a) $\int_0^\pi |\cos x - \sin x| dx$

و علماً أنه: من اجل كل x من $[0; \frac{\pi}{4}]$ فإن $\cos x - \sin x \geq 0$

و من اجل كل x من $[\frac{\pi}{4}; \pi]$ فإن $\cos x - \sin x \leq 0$

$$\int_0^\pi |\cos x - \sin x| dx (u.a) = \left(\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^\pi (\sin x - \cos x) dx \right) (u.a)$$

$$= \left([\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^\pi \right) (u.a) \quad \text{إذاً:}$$

$$= 2\sqrt{2} (u.a)$$

$$\begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t \end{cases} \text{ ينتج أن}$$

$$L = \int_\pi^0 e^t \sin 2t dt = [f(t)g(t)]_\pi^0 - \int_\pi^0 f'(t)g(t) dt = \left[-\frac{1}{2} e^t \cos 2t \right]_\pi^0 + \frac{1}{2} \int_\pi^0 e^t \cos 2t dt$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^\pi + \frac{1}{2} K$$

$$K = \frac{1}{5} (-e^\pi + 1) \text{ وبالتالي: } K = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (e^\pi - 1) + \frac{1}{2} K \right]$$

$$\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = \ln x \\ v'(t) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{x} \\ v(t) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx = [u(t)v(t)]_e^1 - \int_e^1 u'(t)v(t) dt = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_e^1 + \int_e^1 \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{e} - 1$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = 2\sqrt{t+1} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt = [2t\sqrt{t+1}]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{t+1} dt$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{-2\sqrt{2} + 4}{3}$$

حساب المساحات

نعتبر المنحني (C) الذي معادلته $y = \frac{-x^3+x}{x^2+1}$ في المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

• بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$.

• احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C) و المستقيم (Δ)

والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 2$ و $x = -2$.

3

الحل: لدينا من اجل كل x من R , $y = \frac{-x^3+x}{x^2+1} = \frac{-x(x^2+1)+2x}{x^2+1} = -x + \frac{2x}{x^2+1}$

حساب الحجم

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ بالدستور

$$f(x) = \cos x$$

نعتبر مساحة اختيار Ω المستوي المحصور بين المنحني الممثل للدالة f ومحور الفواصل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس.

أحسب حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران اختيار Ω حول محور الفواصل.

5

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi f^2(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2x + 1) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x + x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2} (u.v)$$

الحل: لدينا

تمارين للتدريب

1. احسب التكاملات المحدودة التالية بعد التأكد من وجودها.

$$\int_1^{16} (u-2+3e^{2u}) du, \int_0^{\pi/4} \frac{2 dt}{\cos^2 t}, \int_{-\pi}^0 -\sin 3x dx$$

$$\int_1^0 \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-x+3}} dx, \int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx, \int_{\pi/4}^{\pi/6} \tan^2 x dx, \int_0^1 \sqrt{3x+1} dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^5 t (1 + \tan^2 t) dt, \int_e^2 \frac{dt}{t \ln t}, \int_0^1 x e^{x^2} dx, \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx$$

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكاملات المحدودة التالية:

$$\int_1^e x^2 \ln x dx, \int_2^0 (x-2)e^{1+2x} dx, \int_1^{-2} x e^{5x} dx, \int_1^e t \ln t dt$$

$$\int_{-\pi}^{3\pi/2} x^2 \cos 2x dx, \int_1^0 \frac{u}{\sqrt{2+u}} du, \int_2^1 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx, \int_1^2 (\ln t)^2 dt$$

$$\int_1^2 t(\ln t)^2 dt, \int_{-1}^1 (2x+3)^2 e^x dx, \int_0^{\pi} e^t \sin t dt, \int_1^2 \sin(\ln t) dt$$

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^2} \text{ بالدستور: } R^* \text{ المعرفة على } R^*$$

اكتب الدالة f على شكل مجموع دوال بسيطة، ثم احسب $\int_2^1 f(x) dx$.

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \text{ بالدستور: } R - \{-2; 2\}$$

عَيِّن ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c بحيث من اجل كل x من $R - \{-2; 2\}$

$$g(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

$$h(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2} \text{ بالدستور: } R - \{2\}$$

عَيِّن ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c بحيث من اجل كل x من $R - \{2\}$

$$h(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \text{ بالدستور: } R^* \text{ المعرفة على } R^*$$

$$f(x) = a + \frac{be^x}{e^x - 1}, \text{ عَيِّن عددين حقيقيين } a, b \text{ بحيث من اجل كل } x \text{ من } R^*$$

$$\text{ثم احسب } \int_2^1 f(x) dx$$

5. احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في كل حالة:

$$f(x) = \ln(x-1) \text{ و } I = [2; 4], \text{ و } f(x) = 2x^2 + 5x - 1 \text{ و } I = [-1.3]$$

$$f(x) = e^{3x} \text{ و } I = [0.3], \text{ و } f(x) = \sin^2 x \text{ و } I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x) = \cos^4 x \text{ و } I = \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right], \text{ و } f(x) = x^2 e^{-x^3} \text{ و } I = [-1.0]$$

$$6. (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة } u_n = 2 \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2 + 1} dt$$

• بين أنه من أجل كل n من N ، $u_n \geq 0$

$$• \text{ بين أنه من أجل كل } n \text{ من } N ، u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$$

• احسب الحدود u_0, u_1, u_2

• بين أن (u_n) متناقصة على N ، واستنتج أنها متقاربة، ثم تعرف على نهايتها.

$$7. f \text{ الدالة المعرفة على } [-1, 1] \text{ بالدستور: } f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

• ادرس التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

• g الدالة المعرفة على $[0, \pi]$ بالدستور: $g(x) = F(\cos x)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على $[-1, 1]$.

بين أنه من أجل كل x من $[0, \pi]$ ، $g'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1)$ ، ثم استنتج دالة أصلية

للدالة g' على $[0, \pi]$.

• احسب بدلالة F العدد: $g(0) - g(\pi)$ ، ثم احسب $\int_1^{-1} f(t) dt$.

ماذا تمثل النتيجة المحصل عليها؟

$$8. f \text{ الدالة المعرفة على } R \text{ بالدستور: } f(x) = -x + \frac{3}{2} + \frac{-x}{x^2 + 1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

• ادرس تغيرات الدالة f ، وبين أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = -x + \frac{3}{2}$ هو مستقيم

مقارب للمنحني (C_f) .

• ارسم (D) و (C_f) .

• احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) وبالمستقيمين ذي

المعادلتين $x = -1$ و $x = 2$.

$$9. \varphi \text{ الدالة المعرفة على } R \text{ بالدستور: } \varphi(x) = (x-1)e^{x+1}$$

(C_φ) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

• ادرس تغيرات الدالة φ و ارسم تمثيلها البياني (C_φ) .

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_φ) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ و $x = -1$ و $x = \frac{3}{2}$.

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_φ) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ و $x = -1$ و $x = 1$.

استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_φ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتها: $x = -1$ و $x = \frac{3}{2}$.

10. f الدالة المعرفة على R بـ: $f(0) = 1$ و من أجل $x \neq 0$ ،

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

• بين أن الدالة f مستمرة على R ، ثم احسب العدد $f'(x)$ من أجل كل x من R^* .

• g الدالة المعرفة على R بـ: $g(x) = e^x - xe^x - 1$

• ادرس تغيرات الدالة g ، وتعرف على إشارة العدد $g(x)$ على R ثم استنتج إشارة $f'(x)$. أعط اتجاه تغير الدالة f .

• علّل وجود العدد $h(x)$ من أجل كل x من R حيث: $h(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

• عبّر عن الدالة h باستعمال الدالة F حيث F هي دالة أصلية للدالة f على R .

• استنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق على R وبين أنه من أجل كل x من R ،

$$h'(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1} (3 - e^x)$$

• تعرف على اتجاه تغير الدالة h .

• باستعمال خاصية الحصر للقيمة المتوسطة لدالة، بين أنه من أجل كل x من R^* ، العدد $h(x)$ يقع

بين $f(x)$ و $f(2x)$.

ميز بين الحالتين $x < 0$ و $x > 0$. أحسب إذاً $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$ ،

ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

6- الاحتمالات

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ العدة

◆ عاملي عدد طبيعي

تعريف

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

عاملي n ، هو العدد الطبيعي الذي نرمز له: $n!$ والذي يساوي جداء الأعداد الطبيعية من 1 إلى n .

نكتب: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. نقبل أن: $0! = 1$

◆ عدة السلاسل

تجربة عشوائية تكمن في سحب p عنصر على التوالي من وعاء U يحوي n عنصر.

الوعاء U يعتبر مجموعة ذات n عنصر، ومخارج هذه التجربة تشكل سلاسل ذات p عنصر من U .

• السحب بالإرجاع

عدد السلاسل ذات p عنصر من U ، هو: $n^p = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_p$ (هذه السلاسل تدعى قوائم) عامل p

• السحب بدون إرجاع

عدد السلاسل ذات p عنصر مختلفة من U ، هو: $n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times (n-p+1)$ عامل p

(هذه السلاسل تدعى ترتيبات)

◆ توفيقات

تعريف مجموعة ذات n عنصر، p عدد طبيعي حيث: $0 \leq p \leq n$

توفيقة ذات p عنصر من E ، هي مجموعة جزئية من E تضم p عنصر.

(تكرار العناصر غير ممكن وترتيبها غير مهم)

عدد التوفيقات ذات p عنصر من المجموعة E ذات n عنصر يرمز له $\binom{n}{p}$

أو C_n^p ويعطى بالعلاقة: $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

للحفظ

n و p عدداً طبيعيين حيث: $0 \leq p \leq n$

• $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$, $C_n^0 = 1$

• من أجل $1 < p \leq n$ ،

• $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$ (قاعدة تشكيل مثلث باسكال)

• من أجل كل عددين حقيقيين a و b و من أجل كل n من N^* :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

دستور ثنائي
الحد للنيوتن

★ الفضاء الاحتمالي المنته

◆ مجموعة الإمكانات-الحوادث

تعريف

نتائج التجربة العشوائية تشكل مجموعة منتهية تدعى مجموعة

الإمكانات (مجموعة المخارج) يرمز لها Ω .

كل جزء A من المجموعة Ω يدعى حادثة.

مجموعة أجزاء Ω هي مجموعة جميع الحوادث المرتبطة بالتجربة

العشوائية ويرمز لها $P(\Omega)$.

◆ مصطلحات على الحوادث

للحفظ

المصطلح الاحتمالي	المصطلح الرياضي
الحادثة المستحيلة A	$A = \phi$
الحادثة الأكيدة A	$A = \Omega$
الحادثة الأولية A	$A = \{e_i\}$
الحادثة المعاكسة للحادثة A	\bar{A} متممة المجموعة A
A و B حادثان غير متلامتين	$A \cap B = \phi$

◆ قانون الاحتمال - الاحتمال

تعريف

مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية معينة ذات n مخرج. قانون الاحتمال لتجربة عشوائية هو الدالة التي ترفق بكل حادثة أولية $\{e_i\}$ من

$$P(\Omega) \text{ عدد } p_i \text{ من المجال } [0;1]. \text{ حيث: } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

p_i يدعى احتمال تحقق الحادثة الأولية $\{e_i\}$. ونرمز له بـ: $p_i = p(\{e_i\})$. الاحتمال المرفق بهذا القانون هو الدالة p المعرفة على $P(\Omega)$ بما يلي:

$$p(\phi) = 0$$

وفي حالة $A \neq \phi$ ، $p(A)$ هو مجموع الأعداد p_i من أجل كل مخرج e_i من A .

$$\text{أي: } p(A) = \sum_{e_i \in A} p_i. \text{ يدعى احتمال تحقق الحادثة } A.$$

تعليقات

الاحتمال p هو دالة مجموعة تعريفها $P(\Omega)$ وتأخذ قيمها في المجال $[0;1]$.

مجموعة الإمكانيات Ω مرفقة بالاحتمال p يرمز لها بـ: $(\Omega; p)$ وتدعى فضاء احتمالي منته.

إذا كانت الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال p_0 فإننا نقول أن الحوادث متساوية

$$\text{الاحتمال. ولدينا } p_0 = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} \text{ يرمز إلى عدد عناصر } \Omega.$$

◆ خواص الاحتمال

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته.

$$p(\Omega) = 1$$

إذا كانتا A و B حادثتين من الفضاء فإن: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

إذا كانت A حادثة من الفضاء فإن: $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

◆ المتغير العشوائي - قانون الاحتمال

تعريف

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته.

المتغير العشوائي X هو كل دالة معرفة على مجموعة الامكانيات Ω وتأخذ قيمها في R .

$$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\} \text{ تدعى مجموعة قيم المتغير العشوائي } X.$$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، هو الدالة التي ترفق بكل قيمة x_i من $X(\Omega)$

عدد p_i من المجال $[0;1]$. حيث:

$$p_i = p(X = x_i) = \frac{\text{Card}(X = x_i)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ و } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

◆ الأمل الرياضي - التباين - الانحراف المعياري

تعريف

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته. X المتغير العشوائي المعرف على Ω

$$\text{و } X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\} \text{ مجموعة قيمه.}$$

$$\bullet \text{ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X \text{ هو } E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \text{ حيث } p_i = P(X = x_i)$$

(يدعى كذلك المتوسط الحسابي ويرمز له \bar{X})

$$\bullet \text{ التباين للمتغير العشوائي } X \text{ هو } V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{X})^2 \text{ حيث } p_i = P(X = x_i)$$

ويعطى كذلك بـ: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$\bullet \text{ الانحراف المعياري للمتغير العشوائي } X \text{ هو } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

* الاحتمال الشرطي

تعريف $(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته. A و B حادثتان من Ω حيث:
 $p(A) \neq 0$.

"احتمال تحقق B علما أن A تحقق" هو الاحتمال $p_{A|}$ المعروف بما يلي:
 $p_{A|}(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.
 $p_{A|}$ يدعى الاحتمال الشرطي علما A .

* الحوادث المستقلة

تعريف $(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته. A و B حادثتان من Ω .

الحادثتان A و B مستقلتان عشوائيا إذا فقط إذا كان

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

* دستور الاحتمالات الكليّة

مبرهنة 1

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته، A_1, A_2, \dots, A_n حوادث من هذا الفضاء تشكّل تجرئة له.

من أجل كل حادثة B من الفضاء $(\Omega; p)$ ، لدينا:

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1|}(B) + p(A_2) \times p_{A_2|}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n|}(B)$$

$$\text{أي: } p(B) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i) \times p_{A_i|}(B) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i \cap B)$$

* المتغيرات العشوائية المستقلة

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته، X و Y المتغيران العشوائيان المعرفان على Ω .

$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ و $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \dots; y_m\}$ مجموعتا قيمهما.

X و Y مستقلان معناه من أجل كل $1 \leq i \leq n$ و من أجل كل $1 \leq j \leq m$ ،
 الحادثتان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلتان.

للحفظ

X و Y متغيران عشوائيان مستقلان

$$E(XY) = E(X) \times E(Y) \quad \text{و} \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

* التجارب العشوائية المستقلة

$(\Omega_1; p_1), (\Omega_2; p_2), \dots, (\Omega_n; p_n)$. n فضاء احتمالي منته لـ n تجربة عشوائية معيّنة.

n تجربة عشوائية تكون مستقلة إذا فقط إذا كان احتمال سلسلة الحوادث

(A_1, A_2, \dots, A_n) حيث A_i حادثة من Ω_i هو: $p_1(A_1) \times p_2(A_2) \times \dots \times p_n(A_n)$

* قوانين الاحتمالات

* قانون برنولي (Bernoulli) - قانون ثنائي الحدّ (binomiale)

تعريف نعتبر تجربة عشوائية ذات مخرجين A و \bar{A} ، [يُدعيان النجاح والإخفاق].

ونضع: احتمال تحقق A هو α واحتمال تحقق \bar{A} هو $(1-\alpha)$ حيث: $\alpha \in]0; 1[$.

قانون برنولي B_α هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X والذي

يرفق بالمخرج A القيمة 1 ويرفق بالمخرج \bar{A} القيمة 0.

التجربة العشوائية ذات مخرجين تدعى تجربة برنولي

* خواص

• من أجل قانون برنولي B_α للمتغير العشوائي X المعرف سابقا:

أمله الرياضي هو: $E(X) = \alpha$ و تباينه هو: $V(X) = \alpha(1-\alpha)$

• من أجل $\alpha \in]0; 1[$. نكرّر تجربة برنولي العشوائية n مرة

— نفرض أن التجارب العشوائية مستقلة—

ونعتبر المتغير العشوائي Y الذي يأخذ كقيم، عدد المرات التي يتحقق فيها المخرج α .

تعريفًا: قانون الاحتمال للتغير العشوائي Y يدعى قانون ثنائي الحد وسيطاه n و α ، ويرمز له: $B(n; \alpha)$. معرف بما يلي:

من أجل كل عدد طبيعي k حيث: $0 \leq k \leq n$ لدينا، $P(Y=k) = C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$ ،
ولدينا كذلك: $E(Y) = n\alpha$ و $V(Y) = n\alpha(1-\alpha)$

★ قوانين الاحتمال المستمرة

نعتبر فيما يلي $(I; p)$ فضاء احتمالي غير منته، حيث I مجال غير منته من \mathbb{R} .

◆ قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$

تعريف

قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$ يهدف إلى الاختيار العشوائي لعدد من المجال $[0;1]$.

a و b عدنان من المجال $[0;1]$ حيث: $a \leq b$.

إذا كان J أحد المجالات الأربعة المحددة بالعددين a و b (أي $J = [a; b]$ أو $J = [a; b[$ أو $J =]a; b$ أو $J =]a; b]$...)

فإن الاحتمال P المعرف بقانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ يحقق:
 $P(J) = b - a$

خواص

الاحتمال P المعرف بقانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ يحقق كذلك:

$P(\{x\}) = 0$ و $P(\emptyset) = 0$ و $P([0;1]) = 1$ و من أجل x من المجال $[0;1]$ ،

إذا كان J_1 و J_2 مجالين منفصلين من $[0;1]$ فإن $P(J_1 \cup J_2) = P(J_1) + P(J_2)$

إذا كان \bar{J} متممة المجال J إلى $[0;1]$ فإن $P(\bar{J}) = 1 - P(J)$

في قانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ ، احتمال تحقق أي مجال من $[0;1]$ هو طوله.

◆ القانون الأسّي

تعريف

λ عدد حقيقي موجب تمامًا، و f_λ الدالة العددية المعرفة على

المجال $I = [0; +\infty[$ بالدستور: $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

الاحتمال p على المجال I يعرف القانون الأسّي إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

• من أجل كل مجال J من I حده a و b (حيث a و b عنصران من I و $a \leq b$)

لدينا: $p(J) = \int_a^b f_\lambda(x) dx$

• من أجل كل مجال J حيث: $J = [a; +\infty[$ (a عنصر من I) لدينا:

$p(J) = 1 - p([0; a])$

تعليق

احتمال تحقق المجال $[a; b]$ يفسر هندسيًا، بمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى

الممثل للدالة f_λ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$.

★ قانون احتمال مستمر ذات كثافة

تعريف

• f دالة مستمرة وموجبة تمامًا على المجال $I = [a; b]$ من \mathbb{R} ، حيث: $\int_a^b f(t) dt = 1$

نعرف الاحتمال p على المجال I كما يلي:

من أجل كل مجال J من I حده c و d حيث $c \leq d$ ، $p(J) = \int_c^d f(t) dt$

• f دالة مستمرة وموجبة تمامًا على المجال $I = [a; +\infty[$ من \mathbb{R} ، حيث:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = 1$$

نعرف الاحتمال p على المجال I كما يلي:

من أجل كل مجال J من I حده c و d حيث $c \leq d$ ، $p(J) = \int_c^d f(t) dt$

ومن أجل كل مجال K من I حيث: $K = [c; +\infty[$ أو $K =]c; +\infty[$

مع $c \geq a$ ، $p(K) = 1 - \int_a^c f(t) dt$

في الحالتين p يعرف قانون الاحتمال على المجال I ، والدالة f تدعى الكثافة.

للحفظ

قانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ ، هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالدستور: $f(x) = 1$.
القانون الأسي الذي وسيطه λ ، المعروف على R_+ هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة f المعرفة على R_+ بالدستور: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

تمارين محلولة

الاحتمال الشرطي

1 نلقي زهرة نرد رباعية الوجوه، مرتين على التوالي تحمل أوجهها الأربعة الأرقام من 1 إلى 4.

نقسم مجموع الرقمين اللذين يظهران بعد الرمييتين. احسب احتمال:

- المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3.
- المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2.

الحل: $(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته، حيث $Card(\Omega) = 4^2 = 16$ ، A و B حادثتين من Ω حيث: $p(A) \neq 0$

A حادثة "المجموع يساوي 6" لدينا: $A = \{(2;4); (4;2); (3;3)\}$

B حادثة "الرمية الأولى تعطي 3" لدينا: $B = \{(3;1); (3;2); (3;3); (3;4)\} \neq \emptyset$

و $A \cap B = \{(3;3)\}$

إذا: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

A' حادثة "المجموع أكبر من أو يساوي 7" لدينا: $A' = \{(3;4); (4;3); (4;4)\}$

B' حادثة "الرمية الأولى تعطي 2" لدينا: $B' = \{(2;1); (2;2); (2;3); (2;4)\} \neq \emptyset$

$$A' \cap B' = \emptyset$$

إذا: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2

$$p_{B'}(A') = \frac{p(A' \cap B')}{p(B')} = 0$$
 هو:

توضيف شجرة الاحتمالات واستعمال دستور الاحتمالات الكلية

في دراسة إحصائية لتجمع سكاني معين، أفادت أن 10% من الأشخاص يحملون فيروسا ما.

إجراءات فحص استعجالية أنخذت في هذا التجمع السكاني لتعرف على هؤلاء الأشخاص. فلو حظ أنه من بين الأشخاص الحاملين لهذا الفيروس 95% كان فحصهم ايجابي (فعلا حاملون للفيروس) ومن بين الأشخاص غير الحاملين لهذا الفيروس 4% فحصهم كان ايجابي.

نختار عشوائيا شخصا من هذا التجمع ويجري له الفحص.

A الحادثة "الشخص حامل للفيروس"

و B الحادثة "الفحص ايجابي".

• احسب احتمال الحوادث: $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$.

• احسب الاحتمالين: $p_B(A)$, $p_B(\bar{A})$.

الحل: لحساب احتمال الحادتين $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$ نستعين بشجرة الاحتمالات لتأخذ:

(ترسم في نهاية الحل) لحساب احتمال الحادثة B نستعمل دستور الاحتمالات الكلية وذلك باعتبار أن A و \bar{A} هما الحادثتين في مجموعة الإمكانات.

$$p(B) = p(A) \times p_{A'}(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{131}{1000}$$

$p_B(A)$ هو احتمال تحقق الحادثة A علما أن الحادثة B تحققت وحسب شجرة الاحتمالات

الحل: نختار مجموعة الإمكانات الموافقة لقانون برنولي مثلاً $\Omega = \{B; N\}$ حيث: B هو

الأبيض و N هو الأسود

$$\text{ولدينا: } p(\{B\}) = \frac{2}{5} \text{ و } p(\{N\}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

نعرف بالسحبة المكررة أربع مرات مع الإرجاع، قانون ثنائي الحد وسيطاه 4 و $\frac{3}{5}$.

إذا احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات هو:

$$p(X=3) = C_4^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 = 4 \times \frac{54}{625} = 0.3456$$

معدل الكرات السوداء المسحوبة هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي لقانون ثنائي الحد

$$\text{وسيطاه } 100 \text{ و } \frac{3}{5} \text{ وهو } E(X) = 100 \times \frac{3}{5} = 60.$$

كثافة الاحتمال

في كل حالة أذكر إن كانت الدالة هي كثافة احتمال.

• الدالة f معرفة على المجال $[0;1]$ بالدستور $f(x) = x^2$.

• الدالة g معرفة على المجال $[0;1]$ بالدستور $g(x) = 4x^3$.

• الدالة h معرفة على المجال $[1;2]$ بالدستور $h(x) = 4x^3$.

• الدالة k معرفة على المجال $[-1;0]$ بالدستور $k(x) = 4x^3$.

• الدالة l معرفة على المجال $[2;+\infty[$ بالدستور $l(x) = \frac{2}{x^2}$.

4

الحل: لدينا $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq 1$ إذا الدالة f لا تمثل كثافة احتمال.

لدينا $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 4x^3 dx = \left[x^4\right]_0^1 = 1$ وبما أن الدالة g مستمرة وموجبة على $[0;1]$

فإنها تمثل كثافة احتمال على $[0;1]$.

لدينا $\int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 4x^3 dx = \left[x^4\right]_1^2 = 15 \neq 1$ إذا الدالة h لا تمثل كثافة احتمال.

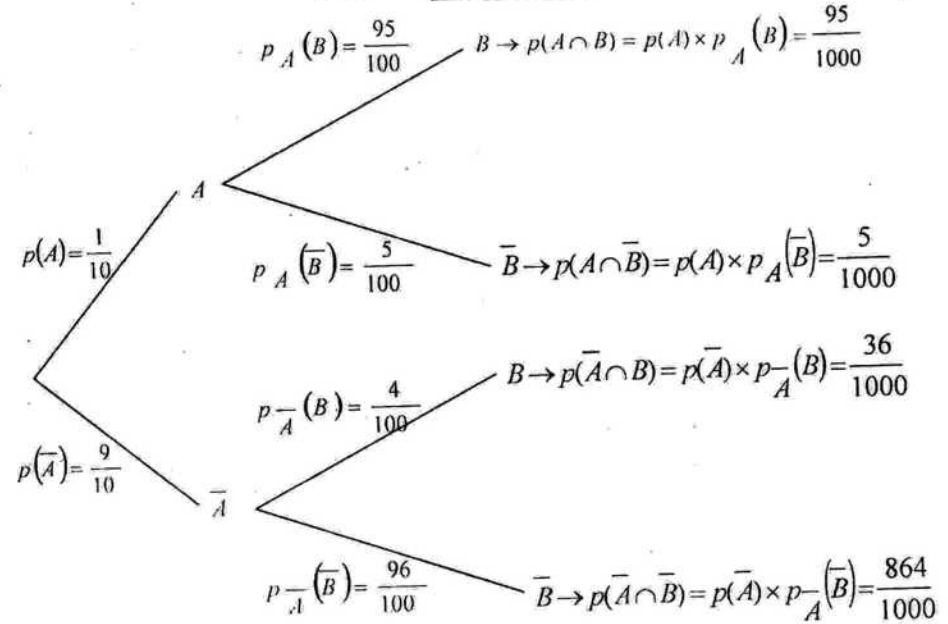
الدالة k لا تمثل كثافة احتمال على المجال $[-1;0]$ ، كونها غير موجبة على $[-1;0]$.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{95}{131}$$

$p_B(\bar{A})$ هو احتمال تحقق الحادثة \bar{A} علماً أن الحادثة B تحققت وحسب شجرة الاحتمالات

$$p_B(\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{36}{131}$$

الشجرة (العنكبوتية)



قانون برنولي

يجوي صندوق خمس كرات لا تميز بينها عند اللمس (2 بيضاء و 3 سوداء)

• نسحب من هذا الصندوق كرة واحدة، كيف يمكننا اختيار مجموعة

الإمكانات التي توافق قانون برنولي في هذه الحالة؟

• نجري أربع سحبات لكرة من الصندوق مع الإرجاع - السحبات الأربع مستقلة -

ما احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات سوداء؟.

• نعيد عملية سحب كرة من الصندوق 100 مرة مع الإرجاع، ما هو

معدل الكرات السوداء المسحوبة؟

3

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \left(\frac{2}{t}\right) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{t}\right]_2^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$

وبما أن الدالة / مستمرة وموجبة على $[2; +\infty[$ فإنها تمثل كثافة احتمال على $[2; +\infty[$.

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر

5 المتغير العشوائي المستمر، والدالة f كثافة الاحتمال المعرفة على

$$f(x) = e^{-x} \text{ بالدستور: } [0; +\infty[$$

علّل كون f كثافة احتمال واحسب احتمال الحادثة $1 \leq X \leq 2$.

الحل: الدالة $f: x \rightarrow e^{-x}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على كامل f وبالخصوص على $[0; +\infty[$.

فهي إذاً مستمرة على $[0; +\infty[$. ومن أجل كل x من \mathbb{R} ، $e^{-x} > 0$.
أي الدالة f موجبة على $[0; +\infty[$.

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^x = 1$

مما سبق فإن الدالة f كثافة احتمال على المجال $[0; +\infty[$.

$$p([1; 2]) = p(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^2 = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.23$$

القانون الأسّي

6 جهاز كهربائي يشتغل بطاريتين P_1 و P_2 . X_1 المتغير العشوائي الذي

يرفق بكل بطارية من النوع P_1 المدة الزمنية لصلاحيتها بالساعة، و X_2 المتغير

العشوائي الذي يرفق بكل بطارية من النوع P_2 المدة الزمنية لصلاحيتها بالساعة.

نفرض أن المتغيران العشوائيان X_1 و X_2 مستقلان ويتبعان نفس القانون الأسّي

الذي كثافته الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بالدستور:

$$f(x) = 0.001e^{-0.001x}$$

نفرض أن الجهاز يتوقف عن التشغيل بمجرد نفاذ إحدى البطاريتين.

• احسب احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة.

• احسب احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل.

الحل: احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة، يعني

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية إحدى البطاريتين على الأقل P_1 أو P_2 أصغر من أو

تساوي 500 ساعة. هو:

$$\begin{aligned} p((X_1 \leq 500) \cup (X_2 \leq 500)) &= p(X_1 \leq 500) + p(X_2 \leq 500) - p((X_1 \leq 500) \cap (X_2 \leq 500)) \\ &= p(X_1 \leq 500) + p(X_2 \leq 500) - p(X_1 \leq 500) \times p(X_2 \leq 500) \\ &= 2 \int_0^{500} 0.001 e^{-0.001x} dx - \left(\int_0^{500} 0.001 e^{-0.001x} dx \right)^2 = 0.63 \end{aligned}$$

احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل، يعني

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية كلا البطاريتين P_1 و P_2 أكبر من أو تساوي 1000 ساعة. هو:

$$\begin{aligned} p((X_1 \geq 1000) \cap (X_2 \geq 1000)) &= p(X_1 \geq 1000) \times p(X_2 \geq 1000) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{1000}^x 0.001 e^{-0.001t} dt \right)^2 = e^{-2} \end{aligned}$$

تمارين للتدريب

1. بسّط العبارات التالية: $\frac{n!}{(n+1)!}$ ، $6! \left(\frac{9}{8!} - \frac{1}{7!} \right)$ ، $\frac{6!5!}{3!4!}$ ، $\frac{12!}{15!}$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$$

باستعمال الرمز ! أعط كتابة أخرى لكل من الأعداد التالية:

$$n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}$$

أنشر ثنائيات الحد التالية: $(2x-1)^6$ ، $(2a-3b)^4$ ، $(a+1)^5$

باستعمال نشر ثنائي الحد $(a-1)^n$ يهن أنه من أجل كل عدد طبيعي زوجي

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1}$$

لدينا: دون النشر، أعط معامل x^4 في نشر ثنائي الحد $(2x-1)^6$.

أنشئ الأسطر الخمسة الأولى لثلث باسكال، ثم احسب الأعداد 11^2 ، 11^3 ، 11^4 باستعمال مثلث باسكال. باستعمال دستور ثنائي الحد، أشرح الظاهرة الملاحظة، ثم فسّر كيف أن هذه الظاهرة لا تصلح من أجل العدد 11^5 .

2. وعاء U_1 يحوي كرتين حمراوين وكرة خضراء. وعاء U_2 يحوي كرة حمراء وكرتين خضراوين.

المرحلة الأولى: نلقي زهرة الترد المكعبة متقنة الصنع.

المرحلة الثانية: إذا ظهر الوجه 6 فإننا نسحب كرة من الوعاء U_1 ، وإذا لم يظهر 6 فإننا نسحب الكرة من الوعاء U_2 .

احسب احتمال تحقق كلا من الحادثتين: A : نحصل في الزهرة على 6 ونسحب كرة حمراء. B : الحصول على كرة حمراء في نهاية المرحلة الثانية.

3. يحوي وعاء 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4.

نسحب على التوالي ثلاث كرات مع الإرجاع، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة أصغر رقم يظهر في الكرات الثلاث. عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

4. يحوي وعاء عشر كرات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب من هذا الوعاء بالصدفة وفي آن واحد أربع كرات ونهتم بالأرقام التي تحملها.

ما هو عدد مخرج هذا النشاط؟

احسب احتمال تحقق كلا من الحوادث التالية:

A نحصل على رقم واحد مضاعف ثلاثة. C نحصل بالضبط على رقمين مضاعفين لثلاثة. B لا نحصل على أي عدد مضاعف ثلاثة. D نحصل على الأقل على رقم مضاعف ثلاثة.

5. ينقسم مصنع إلى ثلاث وحدات α ، β ، γ لإنتاج المصاييح الكهربائية.

وحدة الإنتاج α تغطي 20% من إنتاج المصنع منها 5% غير صالحة للاستعمال.

وحدة الإنتاج β تغطي 30% من إنتاج المصنع منها 4% غير صالحة للاستعمال.

وحدة الإنتاج γ تغطي 50% من إنتاج المصنع منها 1% غير صالحة للاستعمال.

نختار بالصدفة مصباح، احسب احتمال كلا من الحوادث التالية.

A : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة α .

B : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة γ .

C : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة β .

6. يلعب نسيم لعبة معينة ذات عدّة جولات بحيث حظوظ الربح في الجولة الأولى تعادل حظوظ الإخفاق فيها.

نفرض أنه، عندما يربح نسيم جولة فإن احتمال ربح الجولة التي تليها هو 0.6. عندما يخفق نسيم في جولة فإن احتمال الإخفاق في الجولة التي تليها هو 0.7.

من أجل العدد الطبيعي n ، نضع: A_n حادثة "يربح نسيم الجولة من الرتبة n ".

B_n حادثة "يخفق نسيم في الجولة من الرتبة n ".

• احسب احتمال الحوادث A_1 ، B_1 و A_2 واستنتج احتمال الحادثة B_2 .

• نضع: من أجل كل n من N^* : $X_n = P(A_n)$ و $Y_n = P(B_n)$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $X_{n+1} = 0.6X_n + 0.3Y_n$

$$\text{و } Y_{n+1} = 0.4X_n + 0.7Y_n$$

• نضع: من أجل كل n من N^* : $V_n = X_n + Y_n$ و $W_n = 4X_n - 3Y_n$

بين أن المتتالية (V_n) ثابتة.

• بين أن المتتالية (W_n) هندسية، ثم عبّر عن W_n و X_n بدلالة n .

أدرس تقارب المتتالية العددية (X_n) .

7. حارس مرمى في كرة القدم يحقق احتمال لصد الضربات الترجيحية يقدر بـ: 0.3.

يتعرض هذا الحارس لخمس ضربات ترجيحية - (نفرض أن هذه الضربات مستقلة).

ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس لرمية على الأقل؟. ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس للرميات الخمس؟.

8. احتمال مرافق للقانون الأسّي الذي كثافته الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$

$$\text{بالدستور: } f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

عيّن العدد الحقيقي الموجب تماما λ بحيث يكون: $P([0; 2]) = \frac{e^4 - 1}{e^4}$

9. قرّر محمد زيارة مغارة لشراء بعض الحاجيات. دخل محمد المغارة عشوائياً بين الساعة 11:00 و الساعة 12:00 على أن لا تزيد حولته عن 10 دقائق.

ما احتمال أن يتمكن محمد من الاستفادة من التخفيضات التي ستعرضها إدارة المغارة في المدة الزمنية من 11:45 إلى 12:15؟

10. قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[a; b]$ حيث: $a < b$ يهتم بسحب عدد حقيقي بطريقة عشوائية من المجال $[a; b]$.

يتميز هذا القانون بالخاصة التالية: احتمال كل مجال من $[a; b]$ متناسب مع طوله.

نفرض أن قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[a; b]$ هو قانون احتمال مستمر ذات كثافة. أي أنه توجد دالة f معرفة ومستمرة على المجال $[a; b]$ بحيث: من أجل كل مجال $[c; d]$ محتوي في

$$[a; b] \text{ لدينا: } p([c; d]) = \int_c^d f(t) dt$$

نهدف في هذا التمرين إلى تعيين الدالة f .

• لتكن F دالة أصلية للدالة f .

يبين أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث، من أجل كل مجال $[c; d]$ محتوي في $[a; b]$ لدينا:

$$F(d) - F(c) = k(d - c)$$

• نعتبر العدد x_0 من المجال $[a; b]$ ، بين أن الدالة F تقبل الاشتقاق عند x_0 ، واحسب

$$F'(x_0)$$

• استنتج أن الدالة f ثابتة على المجال $[a; b]$.

• باستعمال المساواة $p([a; b]) = 1$ أعط عبارة $f(t)$ من أجل كل t من $[a; b]$.

• ارسم التمثيل البياني للدالة f على المجال $[a; b]$ ، وفسر هندسياً النتائج المحصل عليها سابقاً

$$(\text{خذ } a = -1 \text{ و } b = 4)$$

تطبيق: نختار عشوائياً عدداً من المجال $[-1; 4]$ ما احتمال أن يكون هذا العدد في المجال $[0; 1]$ ؟

ما احتمال أن يكون هذا العدد أصغر من -0.39 علماً أنه سالب؟

7- الأعداد المركبة

Hard Equation

ما يجب أن يعرف:

★ الأعداد المركبة - التمثيل الهندسي

◆ العدد المركب

تعريف العدد المركب هو عدد من الشكل $x + iy$ حيث: x و y عدداً حقيقيين

حقيقيين و i عدد تخيلي يحقق $i^2 = -1$.

نرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز C .

للحفظ

الكتابة $z = x + iy$ للعدد المركب حيث: x و y عدداً حقيقيين

تدعى الشكل الجبري للعدد المركب z

x يدعى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ويرمز له $\text{Re}(z)$.

y يدعى الجزء التخيلي للعدد المركب z ويرمز له $\text{Im}(z)$.

من أجل كل عدد مركب z ، z عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان $\text{Im}(z) = 0$.

z عدد تخيلي إذا وفقط إذا كان $\text{Re}(z) = 0$.

$z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ عدداً مركباً كتبنا بشكلهما الجبري

$z = z'$ يكافئ $x = x'$ و $y = y'$ ، $z = 0$ يكافئ $x = 0$ و $y = 0$

$z + z' = (x + x') + i(y + y')$ مجموع عددين مركبين

$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$ جداء عددين مركبين

◆ التمثيل الهندسي

معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر. $(O; \vec{i}; \vec{j})$

لكل عدد مركب $z = x + iy$ (حيث: x و y عددا حقيقيان) نرفق

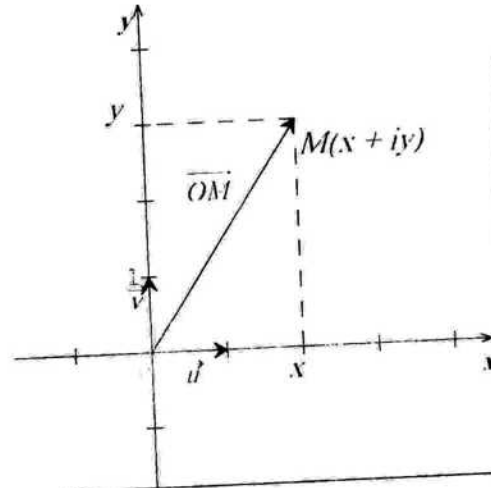
النقطة M من المستوي إحداثياتها $(x; y)$ في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، أو نرفق الشعاع \overline{OM} إحداثياته $(x; y)$ في نفس المعلم.

M تدعى النقطة الصورة للعدد المركب z .

\overline{OM} يدعى الشعاع الصورة للعدد المركب z .

لكل نقطة M من المستوي إحداثياتها $(x; y)$ في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

نرفق عدد مركب $x + iy$ ويدعى لاحقة النقطة M ، أو لاحقة الشعاع \overline{OM} .



للحفظ

معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

متعامد ومتجانس مباشر للمستوي.

A و B نقطتان من المستوي

لاحقتاهما على الترتيب

$$z_1 \text{ و } z_2$$

لاحقة الشعاع \overline{AB} هي العدد

$$z_1 - z_2$$

لاحقة منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو العدد المركب $\frac{z_1 + z_2}{2}$

\vec{u} و \vec{v} شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و z' .

الشعاعان \vec{u} و \vec{v} مرتبطان خطياً إذا فقط إذا كان $z = kz'$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

العدد المركب z حقيقي إذا فقط إذا كانت صورته M تقع على محور الفواصل.

العدد المركب z تخيلي إذا فقط إذا كانت صورته M تقع على محور الترتيب.

◆ مرافق عدد مركب

تعريف

z عدد مركب يكتب بالشكل الجبري $x + iy$ حيث x و y عددا حقيقيان.

مرافق العدد المركب z هو العدد المركب الذي نرسم له \bar{z} ويكتب بالشكل

$$\bar{z} = x - iy$$

للحفظ

في المستوي المركب، صورتا العددين المركبين المترافقين

متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل.

z و \bar{z} عددا حقيقيان.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$z \neq 0 / \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z), \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

z عدد حقيقي إذا فقط إذا كان $z = \bar{z}$.

z عدد تخيلي صرف إذا فقط إذا كان $z = -\bar{z}$.

◆ طولية و عمدة عدد مركب غير معدوم

تعريف

z عدد مركب غير معدوم يكتب بالشكل الجبري

$x + iy$ حيث x و y عددا حقيقيان.

M صورة للعدد المركب z في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد

والتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الإحداثيات القطبية للنقطة M .

r يدعى طولية العدد المركب z ويرمز له $|z|$.

θ يدعى عمدة العدد المركب z ويرمز له $\arg(z)$.

للحفظ

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا كانت النقطة M صورة للعدد المركب z فإن $z = \overline{OM} = OM$.
إذا كانت النقطتان A و B صورتين للعددين المركبين z_A و z_B فإن
 $AB = |z_B - z_A| = \overline{AB}$.

• من أجل كل عددين مركبين z و z' لدينا:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad |zz'| = |z| \times |z'|, \quad |z| = |\bar{z}| = |-z| = |z|$$

$$n \in \mathbb{N} / |z^n| = |z|^n, \quad |z|^2 = z \bar{z}$$

$$z \neq 0 \text{ حيث } \frac{z'}{z} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$z = 0 \text{ يكافئ } |z| = 0$$

$$z = \frac{1}{z} \text{ يكافئ } |z| = 1$$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم

للحفظ

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا كانت النقطة M صورة للعدد المركب غير المعدوم z فإن
 $\arg(z) = (\vec{i}; \overline{OM})$.

إذا كانت النقط A ، B ، C المتمايزة صور الأعداد المركبة z_A ، z_B ، z_C فإن:

$$(\overline{AB}; \overline{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad \text{و} \quad (\vec{i}; \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

للحفظ

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يكافئ } z \in i\mathbb{R}^* \quad \arg(z) = k\pi \text{ يكافئ } z \in \mathbb{R}^*$$

$$k \in \mathbb{Z} / \arg(z) = \pi + \arg(-z) + 2k\pi \quad \arg(z) = -\arg(\bar{z}) + 2k\pi$$

للحفظ

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi], \quad \arg(z z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$n \in \mathbb{N} / \arg z^n \equiv n \arg z [2\pi], \quad \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg z' - \arg z [2\pi]$$

◆ الشكل المثلي لعدد مركب غير معدوم

تعريف

z عدد مركب غير معدوم، r عدد حقيقي موجب تماماً و θ

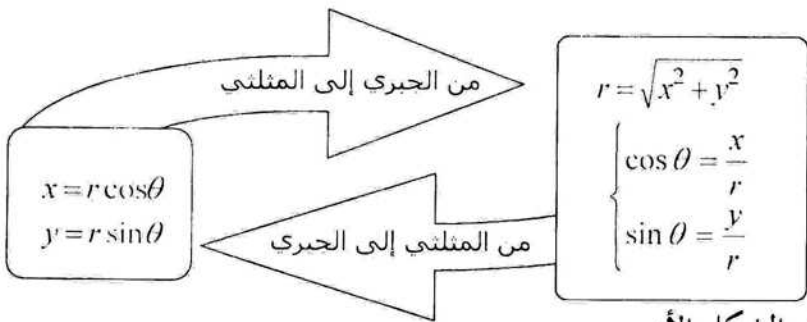
عدد حقيقي كفي.

r طولية العدد z و θ عمدة له إذا فقط إذا كان z يكتب بالشكل

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

هذه الكتابة للعدد z تدعى الشكل المثلي للعدد المركب z .

الانتقال من الشكل المثلي إلى الشكل الجبري والعكس



◆ الشكل الآسي

تعريف

z عدد مركب غير معدوم، r عدد حقيقي موجب

تماماً و θ عدد حقيقي كفي.

للعدد المركب z كتابة من الشكل $z = r e^{i\theta}$ تدعى الشكل الآسي للعدد z .

◆ الجذور النونية لعدد مركب

مبرهنة 2

a عدد مركب غير معدوم، طولته r والعدد الحقيقي θ عمدة له.
العدد a له n جذر نوني وهي حلول المعادلة $z^n = a$ ذات
المجهول المركب z . هذه الحلول كلها من الشكل:

$$k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\} \quad / \quad z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$$

للحفظ

في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس
المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $a \in \mathbb{C}^*$ و n عدد طبيعي.
صور حلول المعادلة $z^n = a$ ذات المجهول المركب z حيث $(n \geq 3)$ ، هي
رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه n مرسوم داخل الدائرة التي مركزها O
ونصف قطرها $\sqrt[n]{|a|}$.

★ الأعداد المركبة والتحويلات النقطية في المستوي

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
النقطتان M و M' صورتين العدديتين المركبتين z و z' على الترتيب.
 f الدالة ذات المتغير المركب z المرفقة بالتحويل النقطي T حيث:

$$f(z) = z' \quad \text{يكافئ} \quad T(M) = M'$$

الجدول التالي يُلخص التعريف الهندسي والتعريف المركب للتحويل النقطي.

خواص

$r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ يكافئ $r = r'$ و $\theta = \theta' + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ يكافئ $r = r'$ و $\theta = \theta' + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

من أجل كل n من \mathbb{Z} ، $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

و $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (دستور موافر)

(دستور أولر) $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ و $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

★ المعادلات من الدرجة الثانية

◆ الجذران التربيعان لعدد مركب

عدد مركب غير معدوم و θ عمدة له. المعادلة $z^2 = a$ تقبل في المجموعة \mathbb{C}

يتين متعاكسين هما: $\sqrt{|a|} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ و $-\sqrt{|a|} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

ويُدعيان الجذران التربيعان للعدد a .

مبرهنة 1

المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b, c أعداد مركبة و $a \neq 0$

تقبل حلين في المجموعة \mathbb{C} هما: $\frac{-b + \delta}{2a}$ و $\frac{-b - \delta}{2a}$

حيث: δ جذر تربيعي للعدد $\Delta = b^2 - 4ac$.

نتيجة

نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b, c أعداد مركبة و $a \neq 0$

إذا كان z_1 و z_2 حلّي هذه المعادلة فإنه من أجل كل عدد مركب z ،

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

ولدينا: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

$$\text{Im}(z_5) = -5 \text{ و } \text{Re}(z_5) = 0 \leftarrow z_5 = \frac{5}{i} = \frac{5(-i)}{-i^2} = -5i$$

الأشكال المختلفة لعدد مركب

ضع على الشكل المثلثي ثم الأسّي كلا من الأعداد:

$$z_3 = -1 + i, z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, z_1 = -3 + i\sqrt{3}$$

ضع على الشكل الجبري كلا من العددين:

$$z_5 = -3\left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right), z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2

الحل: $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$. لدينا $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$ نسمي θ_1 عمدة

$$\text{العدد } z_1 \text{ تحقق إذا: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي: } z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \text{ و } z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \text{ لدينا } |z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \text{ نسمي } \theta_2 \text{ عمدة}$$

$$\text{العدد } z_2 \text{ تحقق إذا: } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي: } z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ و } z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}\right)$$

$$z_3 = -1 + i \text{ لدينا } |z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \text{ نسمي } \theta_3 \text{ عمدة أعداد } z_3$$

التحويل النقطي	التعريف الهندسي	التعريف المركب
الانسحاب شعاعه \vec{v} الذي لاحقه z_0	$\overline{MM'} = \vec{v}$	$z' = z + z_0$
التحاكي مركزه Ω الذي لاحقه z_0 ونسبته k . حيث $k \in \mathbb{R}^*$	$\overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M}$	$z' - z_0 = k(z - z_0)$
دوران مركزه Ω الذي لاحقه z_0 وزاويته θ	$\overline{\Omega M'} = \overline{\Omega M} e^{i\theta}$ و $\left(\frac{\overline{\Omega M'}}{\overline{\Omega M}}\right) = e^{i(\theta + 2k\pi)}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$	$z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$

تمارين محلولة

الكتابة على الشكل الجبري

1 اكتب كلا من الأعداد التالية على الشكل الجبري، ثم عيّن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

$$z_5 = \frac{5}{i}, z_4 = \frac{1-i}{i+2}, z_3 = i^5, z_2 = (2i-3)(2+3i), z_1 = (1+i)^3$$

$$\text{الحل: } \text{Im}(z_1) = 2 \text{ و } \text{Re}(z_1) = -2 \leftarrow z_1 = (1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = -2+2i$$

$$\text{Im}(z_2) = -5 \text{ و } \text{Re}(z_2) = -12 \leftarrow z_2 = (2i-3)(2+3i) = 4i-6-6-9i = -12-5i$$

$$\text{Im}(z_3) = 1 \text{ و } \text{Re}(z_3) = 0 \leftarrow z_3 = i^5 = i \times i^2 \times i^2 = i(-1)(-1) = i$$

$$\text{Im}(z_4) = -\frac{3}{5} \text{ و } \text{Re}(z_4) = \frac{1}{5} \leftarrow z_4 = \frac{1-i}{i+2} = \frac{(1-i)(-i+2)}{(i+2)(-i+2)} = \frac{-i+2+i^2-2i}{1+4} = \frac{1-3i}{5}$$

$\Delta = (-2+9i)^2 - 4(-18-6i) = -5-12i$ تميزها هو $z^2 + (-2+9i)z - 18-6i = 0$
 نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ .

نضع: $z = x + iy$ أحد الجذرين التربيعيين للعدد Δ حيث: x و y عدنان حقيقيان.

$z^2 = \Delta$ يكافئ $(x+iy)^2 = \Delta$ يكافئ $x^2 - y^2 + 2ixy = -5-12i$

يكافئ $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$ يكافئ $z = -2+3i$ أو $z = 2-3i$

لاحظ
 يمكن إضافة معادلة ثالثة مساعدة لحل الجملة وهي: $x^2 + y^2 = 13$ تنتج من تساوي الطوليتين للعددين z و Δ وهي في اتجاه واحد.
 $|z_1| = |z_2|$ يستلزم $z_1 = z_2$

إذاً: حلّي المعادلة هما:

$z' = \frac{(2-9i) - (2-3i)}{2} = -3i$

و $z'' = \frac{(2-9i) + (2-3i)}{2} = 2-6i$

وبالتالي $S = \{z'; z''\}$.

• نبحث عن العدد الحقيقي z_0 الذي يحقق $f(z_0) = 0$.

$f(z_0) = 0$ يكافئ $z_0^3 + 9iz_0^2 + 2(6i-11)z_0 - 3(4i+12) = 0$ يكافئ

$(z_0^3 - 22z_0 - 36) + (9z_0^2 + 12z_0 - 12)i = 0$

يكافئ $\begin{cases} z_0^3 - 22z_0 - 36 = 0 \\ 9z_0^2 + 12z_0 - 12 = 0 \end{cases}$ أي $z_0 = -2$ وهو حل حقيقي للمعادلة $f(z) = 0$.

لإيجاد الحلول الأخرى للمعادلة $f(z) = 0$ ، نحلل العدد $f'(z)$ إلى جداء عاملين أحدهما من الدرجة الأولى نعرفه والآخر من الدرجة الثانية نبحث عنه، باستعمال جدول هورنر (مثلاً)

معاملات $f'(z)$	1	9i	12i-22	-12i-36
أحل حقيقي '•'	///////	-2	-18i+4	12i+36
معاملات هورنر	1	9i-2	-6i-18	0

يعني أن: $f(z) = (z+2)(z^2 + (9i-2)z - 6i-18)$ من أجل كل z من C .

$f(z) = 0$ يكافئ $z+2=0$ أو $z^2 + (9i-2)z - 6i-18 = 0$ حلت سابقاً

يكافئ $z = -2$ أو $z = 2-6i$ أو $z = -3i$

وبالتالي: $S = \{-2; -3i; 2-6i\}$

تحقق $k \in Z / \theta_3 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ إذاً: $\begin{cases} \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

وبالتالي: $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

$z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني أن $|z_4| = 2$ و $\arg z_4 = -\frac{\pi}{3}$

إذاً: $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$ أي $z_4 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

$z_5 = -3(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$ يعني أن $|z_5| = 3$ و $\arg z_5 = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

إذاً: $z_5 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ أي $z_5 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

حل معادلات في C

• حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية:

$z^2 + (-2+9i)z - 18-6i = 0$ ، $3z^2 + z + 1 = 0$ ، $3z^2 + z - 1 = 0$

• نعتبر العبارة $f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$

ذات المتغير z من C .

يبين أن المعادلة $f(z) = 0$ تقبل حلاً حقيقياً في C .

حل في C المعادلة $f(z) = 0$.

الحل: $3z^2 + z - 1 = 0$. تميزها هو $\Delta = 13$ حليها هما: $z' = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ و

$z'' = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ إذاً: $S = \{z'; z''\}$

$3z^2 + z + 1 = 0$. تميزها هو $\Delta = -11 = (i\sqrt{11})^2$ حليها هما:

$z' = \frac{-1-i\sqrt{11}}{6}$ و $z'' = \frac{-1+i\sqrt{11}}{6}$ إذاً: $S = \{z'; z''\}$

التعرف على مجموعة النقط

في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

نعتبر النقطة M إحداثياتها $(z; 1)$ صورة العدد المركب z .

عين وأنشئ (P_1) و (P_2) مجموعتي النقط M من المستوي حيث:

$$(P_1): |z+4|=2 \quad (P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$$

4

الحل: $(P_1): |z+4|=2$ تكافئ $(P_1): AM=2$ حيث A صورة العدد -4 .

إذاً: (P_1) الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2.

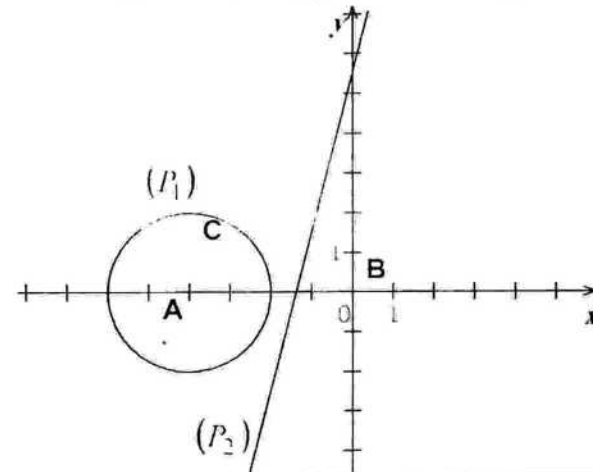
حيث B صورة العدد $(P_2): BM=C'M$ تكافئ $(P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$

$(1+i)$ و C' صورة

العدد $(2i-3)$.

إذاً: (P_2) هي محور

القطعة المستقيمة $[BC]$.



التحويلات النقطية والأعداد المركبة

A صورة العدد المركب $-1 + \sqrt{3} + i$ في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

r الدوران الذي مركزه O ، r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

h التماكي الذي مركزه O ونسبته $\sqrt{3}$.

أحسب لاحقة كلا من النقط B, C, D عنماً أن: $B = s(A)$.

$C' = r(A)$ ، $D = h(C')$ (يتبع)

5

• بين أن A هي صورة B بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

استنتج طبيعة المثلث ABD .

5

الحل: $B = s(A)$ يكافئ $\overline{OB} = -\overline{OA}$ معناه $z_B = -z_A$ أي $z_B = 1 - \sqrt{3} - i$.

$C' = r(A)$ يكافئ $z_{C'} = e^{i\pi/2} z_A$ معناه $z_{C'} = i z_A$ أي $z_{C'} = -1 + i(-1 + \sqrt{3})$.

$D = h(C')$ يكافئ $z_D = \sqrt{3} z_{C'}$ أي $z_D = -\sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})$.

• يكفي التحقق من العلاقة: $e^{i\pi/3} (z_B - z_D) = z_A - z_D$.

لدينا من جهة: $z_A - z_D = -1 + \sqrt{3} + i - (-\sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})) = (2\sqrt{3} - 1) + i(-2 + \sqrt{3})$

ومن جهة أخرى: $e^{i\pi/3} (z_B - z_D) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (1 + i(\sqrt{3} - 4)) = (2\sqrt{3} - 1) + i(-2 + \sqrt{3})$

وبالتالي: $z_A - z_D = e^{i\pi/3} (z_B - z_D)$ إذاً: A هي صورة B بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

• الكتابة الأخيرة تعني أن: $\left(\overline{DA}; \overline{DB}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $DA = DB$

هذا يعني أن المثلث ABD متساوي الساقين وزاوية الرأس الأساس D هي 60° وبالتالي المثلث ABD متقايس الأضلاع.

تمارين للتدريب

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية:

$$-z^2 + 2z - 11 = 0, \quad 2z + i\bar{z} + 8i = 0, \quad 2z + i - (3 - i)^2 = 7i + iz - 1$$

$$\alpha \in \mathbb{R} / z^2 - 2z \sin \alpha + 1 = 0, \quad z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \quad z^4 + (3 - 4i)z^2 - 12i = 0$$

$$\alpha \in]0; \pi[/ z^2 \sin^2 \alpha + z \sin 2\alpha + 1 = 0$$

2. نعتبر العددين المركبين $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

اكتب على الشكل المثلي الأعداد التالي: $z_1, z_2, z_1 z_2, z_1^3, z_1^2, z_1$. استنتج قيمة

كلا من العددين $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$.

3. الدالة المعرفة على المجموعة $C - \{-i\}$ بالدستور: $f(z) = \frac{iz}{z+i}$

نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

• عيّن إحداثيات النقطة A ذات اللاحقة z_0 حيث: $f(z_0) = 1 + 2i$.

• من أجل كل عدد مركب z من $C - \{-i\}$ ، نضع: r طولية العدد $(z+i)$ و العدد α عمدة له.

أعط الشكل المثلي للعدد المركب $f(z) + i$ بدلالة r و α .

• نعتبر النقطة I ذات اللاحقة $-i$.

• عيّن مجموعة النقط M من المستوى والتي تحقق: $|f(z) + i| = \sqrt{2}$.

• عيّن مجموعة النقط M' من المستوى والتي تحقق: $\arg(f(z) + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

• بيّن أن النقطة A تنتمي إلى $\Omega \cap \Omega'$ ، ثم أنشئ المجموعتين Ω و Ω' .

4. في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب $z_A = -2, z_B = 1 + i$ ،

$$z_C = -1 - 3i$$

• تعرّف على طبيعة المثلث ABC .

• من أجل كل عدد مركب $z \neq 1 + i$ نضع: $Z = \frac{z+1+3i}{z-1-i}$

• فسّر هندسيا طولية وعمدة العدد المركب Z .

• عيّن وأنشئ Λ مجموعة النقط M صور العدد z بحيث: $|Z| = 1$.

• عيّن وأنشئ Ψ مجموعة النقط M صور العدد z بحيث يكون Z تخيلي صرف.

5. في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نعتبر النقطة A

ذات اللاحقة 1 ، ومن أجل كل عدد حقيقي θ من المجال $[0; 2\pi]$ النقطة M ذات

اللاحقة $z = e^{i\theta}$.

نضع: P و Q النقطتان ذات اللاحقتان $+1$ و z^2 على التوالي.

• انطلاقا من النقطة M أعط إنشاء هندسيا لكل من النقطتين P و Q . ضع

النقط O, A, M, P و Q في نفس الشكل.

• عيّن وأنشئ مجموعة النقط P من المستوى عندما يتغير θ في $[0; 2\pi]$.

• نضع: S لاحقة العدد المركب $(z^2 + z + 1)$ حيث z يمثل دائما لاحقة النقطة M .

• عيّن وأنشئ مجموعة النقط S .

• في حالة $S \neq O$ ، أنشئ المستقيم (OS) وضع تخمينا حول النقط O, S, M .

• بيّن أن العدد $\frac{z^2 + z + 1}{z}$ حقيقي من أجل كل θ من المجال $[0; 2\pi]$. استنتج.

6. المستوى المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

• حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعاداة: $z^3 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

• نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ و $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$

• أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

• احسب المسافات OA, OB, AB ، واستنتج طبيعة المثلث OAB .

• نعتبر النقطة E صورة العدد المركب $i - \sqrt{3}$ و النقطة D صورهما بالدوران الذي مركزه O

وزاويته $-\frac{\pi}{3}$. عيّن اللاحقة d للنقطة D .

• نعتبر النقطة G مرجح الحملة المثقلة $\{(O; -1); (D; 1); (B; 1)\}$.

تحقق من وجود النقطة G ، ثم عيّن لاحقتها g . بيّن أن النقط E, D, G على استقامة واحدة.

7. التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات

اللاحقة $z' = 3z + 3 - i$ حيث:

• بيّن أن للتحويل النقطي f نقطة صامدة واحدة Ω يضرب بعين لاحقتها ω .

• تحقق أن: $3(\omega - z) = z' - \omega$ و استنتج طبيعة f .

8. f التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$$

بين أن f دوراناً مركزه O يطلب تعيين زاويته. عيّن صورة حامل محور الفواصل بالدوران f .

9. s التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M'

$$z' = -z + 4$$

بين أن للتحويل النقطي s نقطة صامدة واحدة A ، يطلب تعيين لاحقتها a .

بين أن s هو التناظر المركزي والذي مركزه A .

الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، نضع: $M'' = (r \circ s)(M)$

أنشئ النقطة M'' من أجل $z = 3 + i$.

بين أن النقطة M'' هي صورة النقطة M بدوران يطلب تعيين مركزه وزاويته.

10. المستوى المركب المزود بالمعلم المتعمد والمنحاسن المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

T التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيات $(x; y)$ ، النقطة M' ذات الإحداثيات $(x'; y')$

$$\begin{cases} x' = ax - by + a' \\ y' = bx + ay + b' \end{cases}$$

حيث: a, b, a', b' أعداد حقيقية.

بين أن اللاحقتين $z = z'$ و $z = z'$ للنقطتين M و M' على الترتيب تحققان العلاقة $z' = mz + p$

حيث m و p عدداً مركباً يطلب تعيينهما بدلالة الأعداد a, b, a', b' .

عيّن الأعداد a, b, a', b' حتى يكون التحويل النقطي T انسحاباً شعاعه $\vec{j} + 2\vec{i} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

عيّن الأعداد a, b, a', b' حتى يكون التحويل النقطي T تحاكٍ نسبته 3 ومركزه $A(1; 2)$.

عيّن الأعداد a, b, a', b' حتى يكون التحويل النقطي T دوراناً زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه $I(0; 2)$.

8- التشابهات المستوية المباشرة

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ عموميات حول التشابهات المستوية

تعريف

التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوى الذي يحافظ على تناسب المسافات.

أي: من أجل النقط الأربعة A, B, C, D وصورها A', B', C', D'

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

أي: التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوى الذي يضاعف المسافات k مرة.

العدد الحقيقي الموجب تماماً k يدعى نسبة التشابه.

التقايس (أو تساوي القياس) هو التشابه المستوي نسبته 1.

خواص

• مركب تشاهين المستوي نسبتاهما k و k' هو تشابه المستوي نسبته kk' .

• التحويل العكسي للتشابه المستوي الذي نسبته k هو التشابه المستوي الذي نسبته $\frac{1}{k}$.

• التشابه المستوي يحافظ على استقامة النقط.

• التشابه المستوي يحول كل مثلث ABC إلى مثلث $A'B'C'$ يشبهه.

• التشابه المستوي يحافظ على الزوايا.

* التشابه المستوي المباشر

تعريف

التشابه المستوي المباشر هو التشابه المستوي الذي يحافظ على الزوايا الموجهة.

أي: من أجل النقط الأربعة A, B, C, D حيث $A \neq B$ و $C \neq D$ و صورها A', B', C', D' على الترتيب بالتشابه المستوي المباشر،

لدينا: $l \in Z \mid (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'}) + 2l\pi$

الانسحاب، التحاكي، الدوران، هي تشابهات المستوي المباشر.

خواص

- مركب تشاكين المستوي المباشر زاويتاهما θ و θ' هو تشابه المستوي المباشر زاويته $\theta' + \theta$.
- الدحويل العكسي للتشابه المستوي المباشر الذي زاويته θ هو التشابه المستوي المباشر الذي زاويته $-\theta$.
- التشابه المستوي المركب يحول النقطة ذات اللاحقة z إلى النقطة ذات اللاحقة $z' =$ معرف بالعبارة: $z' = az + b$ حيث $a \neq 0$ و b عدنان مركبان و $a \neq 0$.
- في العبارة $z' = az + b$ حيث $a \neq 0$ لدينا: $\arg(a)$ يدعى زاوية التشابه المستوي المباشر.
- التشابه المستوي المباشر الذي يختلف عن الانسحاب، يقبل نقطة صامدة واحدة تدعى مركزه.

للحفظ

S تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω (ليس انسحاب).

S هو مركب (تبديلي) للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k مع الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ .

S تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω .

(S ليس انسحاب)، يحول النقطة M (حيث $M \neq \Omega$) إلى النقطة M' حيث: $\Omega M' = k\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi]$ يتبع...

• S تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω (ليس انسحاب)، يحول النقطة M ذات اللاحقة z (حيث $M \neq \Omega$) إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' يعطى بالعبارة: $z' = kz + \theta$ ($z' = \omega = ke^{i\theta} z$) لاحقة Ω .

• التشابه المستوي المباشر يحافظ على تشابه مباشر للمثلثات، ويحافظ على مرجح الجملة المثقلة.

• التشابه المستوي المباشر يحول المستقيم على مستقيم، والقطعة المستقيمة إلى قطعة مستقيمة، والدائرة إلى دائرة.

• التشابه المستوي الذي يترك ثلاث نقط صامدة ليست على استقامة واحدة هو التحويل المطابق.

• التشابه المستوي الذي يترك نقطتان صامدان A و B متميزتان هو التحويل المطابق أو التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم (AB) .

• من أجل كل أربع نقط A, B, C, D حيث $A \neq B$ و $C \neq D$ ، يوجد تشابه المستوي المباشر f وحيد حيث: $f(A) = C$ و $f(B) = D$.

* الإزاحة

تعريف

الإزاحة هو تشابه المستوي المباشر نسبته 1.

أي: الإزاحة هو تقايس يحافظ على الزوايا الموجهة.

الإزاحة هو
الانسحاب أو
الدوران

للحفظ

نعبر S التشابه المستوي. لدينا حالتين:

① إما S التشابه المستوي المباشر.

② إما S هو مركب تشابه المستوي المباشر مع تناظر محوري بالنسبة لـ Δ (بختار كيفياً).

في هذه الحالة الثانية S يحول كل زاوية إلى زاوية معاكسة. ويدعى S التشابه المستوي غير المباشر محوره Δ .

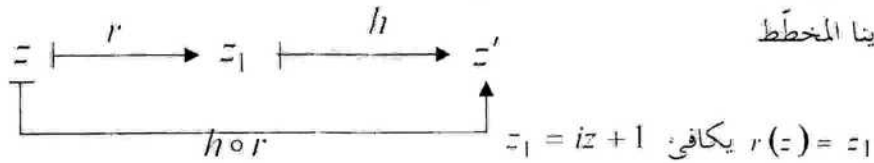
الشكل: $z' - i = \frac{1}{2}(z - i)$ أي: $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$.

العبارة المركبة للدوران r مركزه K لاحتقتها $\frac{1}{2}i$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي من

الشكل: $z' = iz + 1$ أي: $z' - \frac{1+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{1+i}{2} \right)$

استخراج العبارة المركبة للتحويل النقطي $h \circ r$.

لدينا المخطّط



$r(z) = z_1$ يكافئ $z_1 = iz + 1$

$h(z_1) = z'$ يكافئ $z' = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}i$

أي: $z' = \frac{1}{2}(iz + 1) + \frac{1}{2}i = \frac{i}{2}z + \frac{1+i}{2}$ يكافئ $h[r(z)] = z'$

هي عبارة مركبة من الشكل: $z' = az + b$ حيث: $a = \frac{i}{2}$ و $b = \frac{1+i}{2}$

إذًا: $h \circ r$ تشابه المستوي المباشر نسبته $\frac{1}{2}$ $|a| = \left| \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$ وزاويته $\arg a = \frac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $z_0 = 0$ تحقق $z_0 = \frac{1+i}{2} + \frac{i}{2}z_0$ أي: $z_0 = \frac{1+3i}{5}$

التعرّف على المحل الهندسي

3

نعتبر في المستوي الموجه المثلث ABC لقائه في H والمتساوي الساقين. M نقطة كيفية من المستقيم (AM) و M' النقطة من المستوي بحيث يكون المثلث $MM'A$ قائم في M ومتساوي ساقين.

- أعط النسبة k والزاوية θ تشابه المستوي المباشر s الذي مركزه A .
- وحول النقطة M إلى النقطة M' .
- عيّن مجموعة النقط M' من المستوي عندما تتغير النقطة M على المستقيم (BC) .

تمارين محلولة

التعرّف على التشابه المستوي

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.

1 f الدالة في المستوي ترفق بكل نقطة ذات اللاحقة z النقطة ذات

اللاحقة z' حيث: $z' = (1-i)z + 2 - i$.

بيّن أن الدالة f هي التشابه المستوي المباشر بطلب تعيين عناصره المميزة.

الحل: العبارة $z' = (1-i)z + 2 - i$ هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث:

$a = 1 - i$ و $b = 2 - i$ إذًا: f هو التشابه المستوي المباشر.

لدينا: $|a| = |1 - i| = \sqrt{2}$ و $\arg a = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $l \in \mathbb{Z}$

أي: نسبة التشابه f هي $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$

مركز التشابه المستوي المباشر f هي النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $z_0 = 0$

تحقق: $z_0 = (1-i)z_0 + 2 - i$ أي: $z_0 = -1 - 2i$.

مركّب دوران وتحاك

2

A, B, C, D أربع نقط من المستوي المتكّ، لواحقتها على الترتيب

$0, 1, i, 1+i$ أو $i, 1$. نعتبر النقطة K منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$.

h التحاكي الذي مركزه D ونسبته $\frac{1}{2}$ و الدوران الذي مركزه K

وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

• أعط العبارة المركبة لكل من h و r .

• استنتج طبيعة التحويل النقطي $h \circ r$ وعناصره المميزة.

الحل: العبارة المركبة للتحاكي h مركزه D لاحتقتها i ونسبته $\frac{1}{2}$ هي من

الحل: التشابه المستوي المباشر s مركزه I ويحوّل النقطة M إلى النقطة M' معناه:

$$AM' = kAM \quad \text{و} \quad (\overline{AM}; \overline{AM'}) = \theta [2\pi]$$

$$\text{إذاً: } k = \frac{AM'}{AM} = \sqrt{2} \quad (\text{حسب علاقة Pythagore}) \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{كون } \hat{A} = \hat{M}' = \frac{\pi}{4} \text{ في المثلث } (AMM')$$

عندما تتغير النقطة M على المستقيم (BC) فإن صورتها M' بالتشابه s تتغير على المستقيم $(B'C')$.

بما أن B نقطة من (BC) فإن صورتها

$$s(B) = C'$$

ومن أجل كل نقطة M من المستقيم (BC)

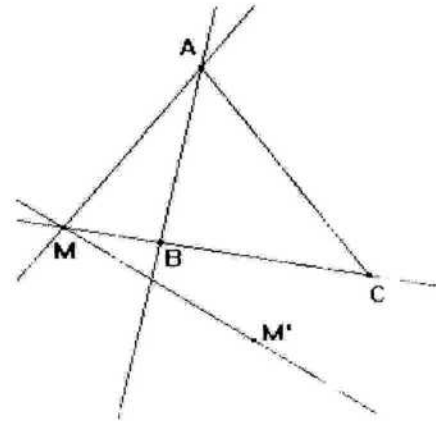
تختلف عن B ، صورتها M' تحقق:

$$\left(\overline{BM}; \overline{C'M'} \right) = \frac{\pi}{4}$$

إذاً: المحل الهندسي للنقطة M' هو المستقيم الذي

يشمل C' ويضع مع المستقيم (BM)

زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$



التشابه المستوي غير المباشر

$(\bar{t}; \bar{t}')$ معمم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر. f التحويل النقطي في

المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات الإحداثيات $(x; y)$ إلى النقطة M'

ذات الإحداثيات $(x'; y')$ حيث: $x' = 2y + 2$ و $y' = 2x - 1$

• بين أن f يقبل نقطة صامدة واحدة Ω يطلب تعيين إحداثياتها.

• بين أن f تشابه المستوي نسبته 2.

• h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2 ويحوّل النقطة M إلى

النقطة M_1 .

بين أن منتصف القطعة المستقيمة $[M'M_1]$ يمر من مستقيم Δ الذي يشمل

النقطة Ω ، يطلب تعيين معادلة للمستقيم Δ وماذا تستنتج إذاً عن التشابه f ؟

4

الحل: $\Omega(x; y)$ صامدة في التحويل f معناه $f(\Omega) = \Omega$ أي: $x = 2y + 2$ و $y = 2x - 1$

أي: $x = 0$ و $y = -1$ ، بما أن الجملة التحليلية قبلت حلاً واحداً فإن

$\Omega(0; -1)$ وحيدة.

نعتبر $M(x; y)$ و $N(a; b)$ نقطتان من المستوي و M' و N' صورتيهما على

الترتيب بالتحويل النقطي f .

لدينا إذاً: $MN^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2$ و

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= (a' - x')^2 + (b' - y')^2 \\ &= 4[(a - x)^2 + (b - y)^2] = 4MN^2 \end{aligned}$$

أي: $M'N' = 2MN$ هذا يعني أن f التشابه المستوي نسبته 2.

h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2 ويحوّل النقطة M إلى النقطة M_1 معناه

$$\Omega M_1 = 2\Omega M$$

بوضع: $M_1(x_1; y_1)$ نحصل على العبارة التحليلية للتحاكي h : $x_1 = 2x$ و $y_1 = 2y + 1$

إذاً: إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[M'M_1]$ هي: $(x_I; y_I)$

حيث: $x_I = x + y + 1$ و $y_I = x + y$.

ينتج أن: $x_I = y_I + 1$ وهي العلاقة بين إحداثيات منتصف القطعة $[M'M_1]$.

وبالتالي مجموعة منتصفات القطع $[M'M_1]$ هي المستقيم Δ ذي المعادلة: $y = x - 1$. واضح أن

إحداثيات Ω تحقق معادلة Δ .

نلاحظ أن $\overline{M'M_1} = (2x - 2y - 2) \vec{n} = (2x - 2y - 2) \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ حيث: $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ هو شعاع

ناظم للمستقيم Δ .

أي $\overline{M'M_1}$ يعامد Δ وبما أن منتصف القطعة $[M'M_1]$ يقع على Δ ، فإن M_1 و M'

متناظرتان بالنسبة للمستقيم Δ .

إذاً: f هو التشابه المستوي غير المباشر، مركزه Ω ونسبته 2 ومحوره Δ .

التشابه المستوي غير المباشر دو نقطتين صامدتين على الأقل

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ معمم للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر.

f التحويل النقطي في المستوي الذي يحول النقطة M ذات

$$5 \quad \text{اللاحقة } z = -1 + 3i \text{ إلى النقطة } M' \text{ ذات اللاحقة } z' = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i \text{ حيث:}$$

• عيّن مجموعة النقط الصامدة في التحويل f .

• عيّن ضبيعة التحويل f وأذكر عناصره المميزة.

الحل: النقطة M ذات اللاحقة $z = -1 + 3i$ صامدة في التحويل f معناه $f(M) = M$

$$\text{أي: } z = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$$

$$\text{يكافئ: } x + iy = \frac{4+3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3i}{5} \Rightarrow (x - \frac{4}{5}) + i(y - \frac{3}{5}) = 0 \text{ يكافئ: } x - 3y + 5 = 0$$

$$\text{يكافئ: } \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ -3x + 9y - 15 = 0 \end{cases}$$

يعني أن مجموعة النقط الصامدة في التحويل f هي المستقيم Δ الذي معادلته

$$x - 3y + 5 = 0$$

$$\text{العبارة } z' = a\bar{z} + b \text{ هي من الشكل: } z' = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$$

$$\text{حيث: } a = \frac{4+3i}{5} \text{ و } b = -1 + 3i$$

إذًا: f هو التشابه المستوي غير المباشر. وبما أن f يترك أكثر من نقطة صامدة

واحدة وكلها على استقامة واحدة. يعني أن: f هو الناظر المحوري بالنسبة

للمستقيم Δ .

تمارين للتدريب

1. ABC' مثلث قائم في A ومتساوي الساقين، I منتصف القطعة $[BC']$.

• أعط العناصر المميزة لكل من التشابه المستوي المباشر s الذي مركزه B ويحول I

إلى A و التشابه المستوي المباشر s' الذي مركزه B ويحول A إلى C' .

• عيّن طبيعة التحويل النقطي $s \circ s'$ وأذكر عناصره المميزة.

2. $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معمم للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين A و B ذات

اللاحقتين $\sqrt{2}$ و i على الترتيب. C' النقطة من المستوي بحيث يكون الرباعي

$OAC'B$ مستطيل.

نضع: I منتصف القطعة $[OA]$ و J منتصف القطعة $[BC']$.

• f التحويل النقطي في المستوي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة

$$M' \text{ ذات اللاحقة } z' = \frac{-i\bar{z}}{2} = \frac{1+i}{2} + i \text{ حيث:}$$

• بين أن f هو التشابه المستوي المباشر ثم عيّن مركزه Ω ونسبته k وزاويته θ .

• عيّن صور النقط A, B, C' و I بالتشابه f .

• بين أن النقط Ω, A و B على استقامة واحدة، وأن النقط Ω, I و C' على استقامة واحدة.

• استنتج إنشاء للنقطة Ω .

• بين أن Ω نقطة من الدائرة التي قترها $[BC']$ ومن الدائرة التي قترها $[IA]$.

3. f التحويل النقطي في المستوي المركب، يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى

النقطة M' ذات اللاحقة $z' = -1 + a\bar{z}$ حيث: $a^2 = 1 - a^2$ حيث a عدد مركب معيّن.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f سحجياً. حدّد f من أجل كل قيمة

للعدد a المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f ناظر مركزي. حدّد f من أجل كل قيمة

للعدد a المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f تحاكٍ نسبته 2. - حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f دوراناً زاويته $\frac{\pi}{2}$. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• حدّد f من أجل $a = 1 - i$.

4. $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين $A(3; -1)$ و $B(0; 2)$.

h التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ ، r الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، و l الانسحاب الذي شعاعه \overline{BC} .

• أنشئ النقطة D من المستوي والتي صورتها بالتحويل $h \circ r \circ l$ هي النقطة (O) .

• بيّن أن التحويل النقطي $h \circ r \circ l$ هو التشابه المستوي المباشر s ، وعيّن عناصره المميّزة. بملاحظة أن المثلث $OD\Omega$ قائم ومتساوي الساقين، أنشئ النقطة Ω مركز التشابه s .

5. نعتبر المربعين المباشرين $ABCD$ و $A'B'C'D'$.

• بيّن أن يوجد التشابه المستوي المباشر s الذي يحوّل النقط A, B, C و D إلى النقط A', B', C', D' بهذا الترتيب.

• نفرض أن المستقيمين (AB) و $(A'B')$ متوازيين، ماذا يمكننا القول عن التشابه s ؟ في حالة وجود مركز للتشابه s ، عيّن وضعيته.

• نفرض أن المستقيمين (AB) و $(A'B')$ غير متوازيين، ونعتبر P نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و $(A'B')$ ، و Q نقطة تقاطع المستقيمين (CD) و $(C'D')$.

• بيّن أن المستقيم (PQ) يشمل المركز Ω للتشابه s . ثم استنتج إنشاءً للنقطة Ω .

6. $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر الرباعي المخدّب المباشر $ABCD$. ننشئ خارج هذا الرباعي النقط M_1, M_2, M_3 و M_4 بحيث تكون

المثلثات الأربعة $AM_1B, BM_2C, CM_3D, DM_4A$ قائمة عند النقط M_1, M_2, M_3 و M_4 على الترتيب ومتساوية الساقين.

• نضع: a, b, c, d لواحق النقط A, B, C, D على الترتيب و z_1, z_2, z_3, z_4 و z_4 لواحق النقط M_1, M_2, M_3, M_4 على الترتيب.

• باعتبار التشابه الذي مركزه A ويحوّل النقطة B إلى النقطة M_1 ,

$$z_1 = \frac{a + b + i(a - b)}{2}$$

• عبّر عن z_2, z_3, z_4 بدلالة الأعداد a, b, c, d .

• بيّن أن حاملتي القطعتين $[M_1M_3]$ و $[M_2M_4]$ متعامدين وأن $M_1M_3 = M_2M_4$.

7. $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. f التحويل النقطي في

المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z'

$$z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

• عيّن صورة النقطة A ذات اللاحقة 2 بالتحويل f ، ولاحقة النقطة B حيث: $f(B) = O$.

• تعرّف على طبيعة التحويل f واذكر عناصره المميّزة.

• في حالة $M \neq A$ بيّن أن المثلث AMM' قائم في النقطة M' .

8. $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

• عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي والتي لاحتقتها z تحقق:

$$\left| \frac{z}{1 - i\sqrt{3}} - i - \sqrt{3} \right| = 4$$

• أعط العبارة المركبة للتشابه المستوي المباشر s الذي يحوّل النقطة A ذات اللاحقة i إلى

النقطة O ويحوّل النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}$ إلى النقطة B' ذات اللاحقة $4i$.

• معيّنًا مركز ونسبة وزاوية التشابه s .

• باستعمال نتائج السؤال السابق، أوحد المجموعة (E) المعرفّة في التمرين.

9. $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

• التشابه المستوي المباشر، مركزه O ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$

من أجل n عدد طبيعي، نعتبر مجموعة النقط M_n المعرفّة بـ: $M_{n+1} = s(M_n)$

9- الهندسة الفضائية

Hard Equation

ما يجب أن يعرف:

★ الجداء السلمي في الفضاء

تعريف

\vec{u} و \vec{v} شعاعان من الفضاء.

(A, B, C) ثلاث نقط من الفضاء تحقق: $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{AC}$

يوجد على الأقل مستوى P يشمل نقط A, B, C .

الجداء السلمي للشعاعين \vec{u} و \vec{v} في الفضاء هو الجداء السلمي للشعاعين

\overline{AB} و \overline{AC} في المستوي P . وهو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ المعروف بـ:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ حيث: $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$

و $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ من أجل $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$

★ التعامد في الفضاء

للحفظ

• \vec{u} و \vec{v} شعاعان من الفضاء متعامدان معناه $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

• المستقيمان (D) و (D') من الفضاء متعامدان معناه شعاعي توجيههما

$\vec{d}(D)$ و $\vec{d}(D')$ متعامدان.

• الشعاع \vec{n} ناظم على المستقيم (D) معناه \vec{n} يعامد شعاع التوجيه

$\vec{d}(D)$ للمستقيم (D) .

• الشعاع \vec{n} ناظم على المستوي (P) في الفضاء معناه \vec{n} يعامد شعاعان

غير مرتبطين خطياً من (P) .

يتبع...

و M_0 النقطة ذات اللاحقة 1.

نرمز بـ: τ_n للاحقة النقطة M_n .

• أعط العبارة المركبة للتشابه المستوي المباشر τ .

• بين أن المتتالية $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية، واكتب عبارة τ_n بدلالة n .

• احسب τ_1, τ_2, τ_3 و τ_n .

• احسب OM_n بدلالة n .

• بين أن $\frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{\tau_{n+1}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$ واستنتج أن: $(M_n M_{n+1}) \perp (OM_{n+1})$

وأن $M_n M_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$

• نضع: $K_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$. عبّر عن K_n بدلالة n .

• احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$.

10. $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر.

(D) المستقيم الذي يشمل المبدأ O و \vec{n} شعاع توجيه له.

نرمز بـ: α لقياس الزاوية $(\vec{i}; \vec{n})$.

• تحقق أن النقطة A ذات اللاحقة $e^{i\alpha}$ تنتمي إلى المستقيم (D) .

• استنتج أن العبارة المركبة للتناظر المحوري $S_{(D)}$ بالنسبة للمستقيم (D) هي:

$$\tau' = e^{2i\alpha} \tau$$

• ضع الشكل النهائي للعبارة المركبة للتحويل $S_{(D)}$ في كل من الحالتين:

$$(D): x - y\sqrt{3} = 0, (D): y = -x$$

تمارين محلولة

التعامد في الفضاء

A, B, C, D أربع نقط من الفضاء.

• برهن صحة التكافؤ التالي:

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \text{ إذا وفقط إذا كان المستقيمان } (AB)$$

و $(C'D)$ متعامدان.

1

• $ABCD$ رباعي الوجود حيث (AB) و $(C'D)$ متعامدان و (AD)

و (BC) متعامدان.

بين أن المستقيمان (AC) و (BD) متعامدان.

الحل: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ يكافئ $(AC^2 - AD^2) + (BD^2 - BC^2) = 0$

يكافئ $(AC - AD)(AC + AD) + (BD - BC)(BD + BC) = 0$

يكافئ $\overline{DC} \cdot (\overline{AC} + \overline{AD}) + \overline{CD}(\overline{BD} + \overline{BC}) = 0$

يكافئ $\overline{DC} \cdot (2\overline{AB}) = 0$ أي $\overline{DC} \cdot (\overline{AC} + \overline{AD} - \overline{BD} - \overline{BC}) = 0$

يعني أن الشعاعان \overline{DC} و \overline{AB}

وبالتالي في حالة $A \neq B$ و $C \neq D$ يكون لدينا: المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

لدينا المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان، ينتج حسب ما سبق أن:

$$(1) \dots AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

ومن تعامد (AD) و (BC) ينتج كذلك بإتباع نفس العلاقة السابقة

$$(2) \dots AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2$$

من (1) و (2) ينتج أن $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$ هذا يعني كذلك بإتباع نفس العلاقة

السابقة أن: المستقيمان (AC) و (BD) متعامدان.

• المستقيم (D) يعامد المستوي (P) معناه شعاع توجيهه المستقيم (D) هو شعاع ناظم على المستوي (P) .

• المستويان (P) و (P') في الفضاء متعامدان معناه شعاعيهما الناظم $\vec{n}(P)$ و $\vec{n}(P')$ متعامدان.

* المعادلة الديكارتية للمستوي

تعريف $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (P) مستوي من الفضاء

يشمل النقطة A و $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظم له.

من أجل كل نقطة $M(x; y; z)$ من الفضاء:

$$\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ معناه } M(x; y; z) \in (P)$$

من التكافؤ الأخير تنتج معادلة للمستوي (P) من الشكل:

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ حيث } d \in \mathbb{R}$$

للحفظ

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

• المسافة بين النقطتين $A(x_0; y_0; z_0)$ و $B(x_1; y_1; z_1)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

• المسافة بين النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$ والمستوي (P) الذي معادلته

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ هي: } \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

إذن الشعاعان \overline{AB} ، \overline{BC} غير مرتبطين خطياً. (هذا النمط للبرهان يدعى البرهان بالخلف).
نعلم أن للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل: $ax + by + cz + d = 0$
يكفي إذاً البحث عن الأعداد a, b, c, d .

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{10}{29}d \\ b = -\frac{11}{29}d \\ c = -\frac{3}{29}d \end{array} \right. \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} a+2b-c+d=0 \\ 2a+3c+d=0 \\ -a+3b+2c+d=0 \end{array} \right. \text{ معناها } \left\{ \begin{array}{l} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{array} \right. \text{ لدينا:}$$

نعطي أية قيمة للعدد d . مثلاً $d = 29$

نحصل على معادلة المستوي: $(ABC): -10x - 11y - 3z + 29 = 0$

حساب مقدار

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $B(2;1;-1), A(3;0;-1)$

$C(4;2;5)$ و $D(3;4;3)$ أربع نقط من هذا الفضاء.

• تأكد أن المثلث ABC متساوي الساقين ثم احسب مساحته.

• تأكد أن للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل:

$$2x + 2y - z - 7 = 0$$

• أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) ، ثم حجم رباعي

الوجوه $ABCD$.

الحل: لدينا: $\overline{AB}(-1;1;0)$ ، $\overline{AC}(1;2;6)$ ، $\overline{BC}(2;1;6)$

$$AB = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \text{، } AC = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41} \text{، } BC = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41}$$

يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين ورأسه الأساس هو C .

مساحة المثلث ABC هي S_{ABC} ، حيث $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CT$ ؛ و I منتصف القطعة $[AB]$

$$S_{ABC} = AI \times CI$$

$$\text{لدينا: } I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2} (u.a)$$

$$\text{و } AI = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } CI = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

معادلات ديكارتية للمستقيم والمستوي في الفضاء

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;2;-1)$ ، $B(2;0;3)$

و $C(-1;3;2)$ ثلاث نقاط من هذا الفضاء.

أعط تمثيل وسيطي ثم ديكارتي للمستقيم (AB) .

تحقق من وجود المستوي (ABC) ثم أعط معادلة ديكارتية له.

الحل: لدينا $\overline{AB}(1;-2;4)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

$M(x; y; z) \in (AB)$ يكافئ $\overline{AM} = k \overline{AB}$

$$k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{cases} = k \begin{cases} 1 \\ -2 \\ 4 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\text{أي: } k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = k+1 \\ y = -2k+2 \\ z = 4k-1 \end{cases} \text{ ويستنتج التمثيل الديكارتي بجملة}$$

معادلتين مستقلتين عن k .

$$\begin{cases} k = x-1 \\ y = -2(x-1)+2 \\ z = 4(x-1)-1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x = k+1 \\ y = -2k+2 \\ z = 4k-1 \end{cases}$$

$$\text{تدعى تمثيل ديكارتي للمستقيم } (AB) \text{ تكافئ } \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 4x - z - 5 = 0 \end{cases}$$

للمستوي (ABC) موجود إذا وفقط إذا كانت النقط A, B, C ليست على استقامة واحد.

ي: المستوي (ABC) موجود إذا وفقط إذا كان الشعاعان \overline{AB} ، \overline{BC} غير مرتبطين خطياً.

فرض أن \overline{BC} ، \overline{AB} مرتبطين خطياً أي يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\overline{AB} = k \overline{BC}$

$$\text{وهذا تناقض } \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = -\frac{2}{3} \\ k = -4 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} -3k = 1 \\ 3k = -2 \\ -k = 4 \end{cases} \text{ معناها } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• $M(k+1; k+2; -2k)$ نقطة من المستقيم (AB) معناه $M(x; y; z)$.

وبالتالي: $MC^2 = (k+1)^2 + (k+2-2)^2 + (-2k-4)^2$ أي

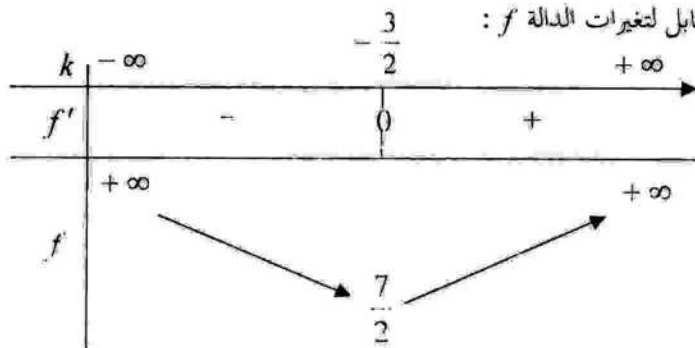
$$MC^2 = 6k^2 + 18k + 17$$

أصغر قيمة ممكنة للمسافة MC ، هي القيمة الحدّية الصغرى للدالة

$$f: k \mapsto 6k^2 + 18k + 17$$

بعد دراسة مختصرة لتغيرات الدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية

نحصل على الجدول المقابل لتغيرات الدالة f :



أصغر قيمة للدالة f هي $\frac{7}{2}$ تأخذها من أجل $k = -\frac{3}{2}$. هذا يعني أن أصغر قيمة

للعدد MC^2 هي: $\frac{7}{2}$. إذاً أصغر قيم للمسافة MC هي: $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

المسافة بين نقطة ومستوى

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1; 2; -1)$ نقطة من هذا الفضاء.

نعتبر المستويين P و P' حيث: $(P): 2x - y + 2z - 5 = 0$ و

$$(P'): 2x + 2y - z - 4 = 0$$

• بيّن أن المستويين P و P' متعامدان.

• أحسب المسافة بين النقطة A وكل من المستويين P و P' .

• استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم Δ الناتج من تقاطع

المستويين P و P' .

5

• يكفي التحقق من أن إحداثيات النقط الثلاث A, B, C و C' تحقق معادلة (ABC') ، علماً أنّها ليست على استقامة واحدة.

$$A \in (ABC') \text{ أي } 2(3) + 2(0) - (-1) - 7 = 6 + 1 - 7 = 0$$

$$B \in (ABC') \text{ أي } 2(2) + 2(1) - (-1) - 7 = 4 + 2 + 1 - 7 = 0$$

$$C' \in (ABC') \text{ أي } 2(4) + 2(2) - 5 - 7 = 8 + 4 - 5 - 7 = 0$$

• المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC') تعطى بالعلاقة: $\frac{|2x_D + 2y_D - z_D - 7|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4}{3}$

هذه المسافة تمثل طول الارتفاع h النازل من الرأس D على القاعدة (ABC) في رباعي الوجوه $ABCD$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 2(u.v)$$

$$\text{حيث: } h = \frac{4}{3} \text{ و } s = S_{ABC}$$

$(u.u)$ يرمز إلى وحدة المساحة و $(u.v)$ يرمز إلى وحدة الحجم.

المسافة بين نقطة ومستقيم

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $B(2; 3; -2), A(1; 2; 0)$

$C'(0; 2; 4)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء.

• عيّن تمثّل وسيطي للمستقيم (AB) .

• عيّن النقطة M من المستقيم (AB) بحيث تكون المسافة MC' أصغر ما يمكن.

4

الحل: لدينا $\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

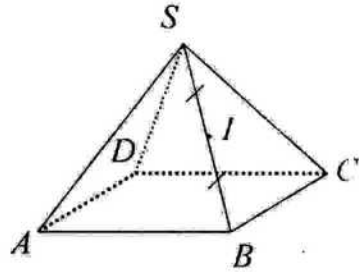
$$M(x; y; z) \in (AB) \text{ يكافئ } \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$$

$$k \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ يكافئ}$$

$$\text{أي: } k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 2 \\ z = -2k \end{cases}$$

تمارين للتدريب

1. هرم $ABC'D'S$ ، قاعدته مربعة ورأسه S ، وأحرفه متقايسة وقيسها a .



I منتصف الحرف $[SB]$.

• احسب بدلالة a الجداءات السلمية التالية:

$$\vec{SA} \cdot \vec{BC'}, \vec{SA} \cdot \vec{SC'}, \vec{SA} \cdot \vec{SB}$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AC'}, \vec{SB} \cdot \vec{AC'}, \vec{SA} \cdot \vec{AC'}$$

• عيّن قياساً للزاوية $\hat{A}IC'$.

2. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(2; -3; 4)$ ، $B(1; 0; 2)$ ، $C'(2; -1; 2)$

و $D(1; -1; 3)$ أربع نقط من هذا الفضاء.

بيّن أن النقط الأربعة A ، B ، C' ، و D من نفس المستوي بطريقتين:

• بالتعبير عن الشعاع \vec{AD} بدلالة الشعاعين \vec{AB} و $\vec{AC'}$.

• بالبرهان أن النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC') .

3. مكعب $ABCDEFGH$ مكعب. بيّن أن المستويين (BDE) و (CFH)

متوازيين وذلك بطريقتين مختلفتين:

• بطريقة هندسية.

• باستعمال المعلم $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$ ومعادلات المستويات.

4. مكعب $ABCDEFGH$ مكعب. P مركز ثقل المثلث BEG .

باستعمال المعلم $(E; \vec{EF}; \vec{EH}; \vec{EA})$. تعرّف على إحداثيات النقط

E ، F ، B ، D ، G و P ، ثم بيّن أن النقط D ، F و P على استقامة واحدة.

5. مكعب $ABCDEFGH$ مكعب قياس حرقه a . اهدف في هذا التمرين هو البرهان على

أن $(AG) \perp (BDE)$ بثلاث طرق مختلفة.

الحل: $\vec{n}(2; -1; 2)$ شعاع ناظم على المستوي P و $\vec{n}'(2; 2; -1)$ شعاع ناظم

على المستوي P' .

ولدينا: $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times 2 + 2(-1) + (-1)2 = 0$ معناه $\vec{n} \perp \vec{n}'$ وبالتالي للمستويين

P' و P متعامدين.

المسافة بين النقطة A والمستوي P تعطى بالعلاقة: $\frac{|2(1) - (2) + 2(-1) - 5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{7}{3}$

المسافة بين النقطة A والمستوي P' تعطى بالعلاقة: $\frac{|2(1) + 2(2) - (-1) - 4|}{\sqrt{4+4+1}} = 1$

لتكن I المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P . أي $AI = \frac{7}{3}$ و I' المسقط العمودي

نقطة A على المستوي P' .

ي $AI' = 1$. نسمي B المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم Δ .

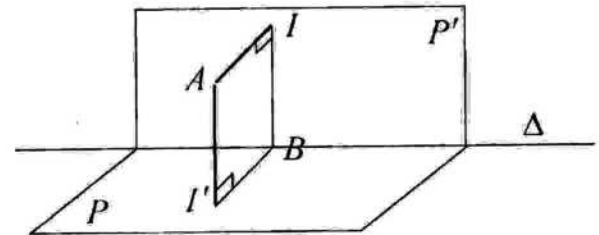
بنا الرباعي $AIBI'$ مستطيل، ذلك لأن $(BI) \perp (BI')$ و $(AI) \perp (BI)$ و

$(BI') \perp (BI)$ (من المعطيات)

: المثلث AIB قائم في I . حسب فيثاغورث Pythagore لدينا:

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 1 = \frac{58}{9}$$

وهي المسافة بين النقطة A والمستقيم Δ . $AB = \frac{\sqrt{58}}{3}$



(1) بين أن النقطتين A و G تنتميان إلى المستوي المحوري للقطعة $[BE]$ وكذلك إلى المستوي المحوري للقطعة $[BD]$. استنتج.

(2) بين أن: $\overline{AG} \cdot \overline{BD} = 0$ وأن: $\overline{AG} \cdot \overline{BE} = 0$. أستنتج أن $(AG) \perp (BDE)$.

(3) استعمل المعلم المتعامد والمتجانس $(A; \overline{AB}; \overline{AD}; \overline{AE})$.

6. $ABCDEF$ مكعب. نعتبر المعلم المباشر للفضاء $(A; \overline{AB}; \overline{AD}; \overline{AE})$.

يرمز I إلى منتصف القطعة المستقيمة $[EF]$ ، و J مركز المربع $ADHE$.

احسب مساحة المثلث IGA . احسب حجم رباعي الوجوه $ABIG$ ، واستنتج

البعد بين النقطة B والمستوي (AIG) .

عين إحداثيات K نقطة تقاطع المستقيم (BJ) مع المستوي (AIG) .

اعد إذاً حساب المسافة بين النقطة B والمستوي (AIG) .

7. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$A(-1; 2; 0)$ ، $B(-3; 4; 2)$ ، $C(1; -2; -1)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء.

بين أن الشعاعان \overline{AB} و \overline{AC} غير مرتبطين خطياً.

بين أن الشعاع $\vec{n}(a; b; c)$ يكون ناظم على المستوي (ABC) إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} -a + b + c = 0 \\ 2a - 4b - c = 0 \end{cases}$$

استنتج مما سبق إحداثيات صحيحة نسبية للشعاع الناظم \vec{n} على المستوي (ABC)

ومعادلة ديكرارية للمستوي (ABC) .

8. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (P) المستوي الذي يشمل

النقطة $A(1; -2; 1)$ والشعاع $\vec{n}(-2; 1; 5)$ ناظم عليه.

(P') المستوي الذي معادلته الديكرارية هي: $x + 2y - 7 = 0$.

بين أن المستويان (P) و (P') متعامدان.

بين أن المستويان (P) و (P') يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة

$C(-1; 4; -1)$ وشعاع توجيهه $\vec{d}(2; -1; 1)$.

احسب المسافة بين النقطة $B(5; -2; -1)$ وكلا من المستويين (P) و (P') ، ثم عين

المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) .

9. $ABCDEFGH$ مكعب. نرسم I و I' لمركزي الوجوه $ADHE$ و

$BCGF$ على الترتيب.

N و P نقطتان من القطعتين $[HF]$ و $[AC]$ على الترتيب المعرفتان بـ: $\overline{HN} = k\overline{HF}$

و $\overline{AP} = k\overline{AC}$ حيث: $k \in [0; 1]$.

بين أن النقطة N هي مرجح الجملة المثقلة $\{(H; 1-k); (F; k)\}$ وأن النقطة P هي

مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1-k); (C; k)\}$.

نعتبر النقطة J منتصف القطعة $[NP]$ ، بين أن: $\overline{HN} + \overline{AP} = 2\overline{IJ}$ و

$$\overline{HF} + \overline{AC} = 2\overline{IJ}$$

استنتج أن: $\overline{IJ} = k\overline{II'}$ / $k \in [0; 1]$

ما هي مجموعة النقط J عندما يتغير k في المجال $[0; 1]$ ؟

10. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. عين تقاطع سطح الكرة (Γ) الذي

مركزه $\Omega(1; -1; 1)$ ونصف قطره 3 مع المستوي (xOy) .

10 - المقاطع المستوية للسطوح

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

* مقطع سطح بمستوى مواز لأحد مستويات الإحداثيات

◆ حالة الاسطوانة الدورانية

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

(Γ) اسطوانة دورانية محورها (Oz) ونصف قطرها r .

• مقطع (I) بالمستوي الذي معادلته $a \in \mathbb{R} / z = a$ هي الدائرة C_a

مركزها $\Omega(0; 0; a)$ ونصف قطرها r .

• مقطع (Γ) بالمستوي الذي معادلته $x = a$ أو $y = a$ هي مستقيم،

إتحاد مستقيمين أو مجموعة خالية.

للحفظ

إذا كان (C) مقطع الاسطوانة الدورانية (Γ) بالمستوي العمودي

على محورها فإن (Γ) هو:

• اتحاد الدوائر صور (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\lambda \vec{k}$ حيث λ يسمح

بمجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر.

• اتحاد المستقيمات الموازية للمستقيم (Oz) والتي تقطع (C) .

◆ حالة المخروط الدوراني

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Γ') مخروط دوراني غير محدود محور (Oz) ومركزه O .

• مقطع (Γ') بالمستوي الذي معادلته $a \in \mathbb{R} / z = a$ هو الدائرة C_a التي

مركزها $\Omega(0; 0; a)$.

• مقطع (Γ') بالمستوي الذي معادلته $x = a$ أو $y = a$ هو إتحاد مستقيمين أو قطع زائد.

للحفظ

إذا كان (C) مقطع المخروط الدوراني غير المحدود (Γ') بالمستوي

العمودي على محوره والذي لا يشمل O فإن (Γ') هو:

• اتحاد الدوائر صور (C) بالتحاكيات التي مركزها O ونسبتها λ حيث

λ يسمح بمجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا 0.

• اتحاد المستقيمات التي تشمل المبدأ O ونقطة من (C) .

* الدوال ذات متغيرين

◆ السطوح

تعريف

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

f الدالة العددية للمتغيرين x و y معرفة على المجال I بالنسبة للمتغير x

وعلى المجال J بالنسبة للمتغير y .

بمجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث: $x \in I$ و $y \in J$ و $z = f(x; y)$

تدعى سطح Σ من الفضاء يمثل الدالة f ، و $z = f(x; y)$ هي معادلة

ديكارتية للسطح Σ .

مقطع السطح Σ بالمستوي الذي معادلته $z = \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ يدعى

منحني الدالة f من المستوى λ .

◆ أسطح خاصة

• السطح الذي معادلته $z = x^2 + y^2$ يدعى مجسم مكافئ دوراني e Paraboloid.

منحنياته من المستوى هي دوائر.

مقطعه بالمستويات الموازية لأحد المستويين (xOz) أو (yOz) هو قطع مكافئ.

إذا كان (P) القطع المكافئ الذي معادلته $z = x^2$ في المستوى المزود بالمعلم $(O; \vec{i}; \vec{k})$.

فإننا نحصل على المجسم المكافئ الدوراني، بدوران (P) حول المحور (Oz) .

الأسطوانة الدورانية - المخروط الدوراني - سطح الكرة

$B(1;2;3)$ ، $A(1;1;\sqrt{6})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

و $C(0;0;1)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء.

• أعط معادلة المخروط الدوراني Γ الذي محوره (Oz) ورأسه O ويشمل

النقطة A . أحسب θ زاويته عند الرأس.

• أعط معادلة الأسطوانة الدورانية Ψ التي محورها (Oz) وتشمل النقطة B .

• نعتبر سطح الكرة S ، التي مركزها C ونصف قطرها 3. عيّن طبيعة المجموعة

$\Psi \cap S$ واعط معادلة ديكارتية لها.

2

الحل: للمخروط الدوراني Γ معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0$

بما أن $A \in \Gamma$ فإن: $1^2 + 1^2 - \alpha^2 \sqrt{6}^2 = 0$ أي $\alpha^2 = \frac{1}{3}$ وبالتالي: $\Gamma: x^2 + y^2 - \frac{1}{3}z^2 = 0$

نضع: $H(0;0;\sqrt{6})$ المسقط العمودي للنقطة A على المحور (Oz) .

ينتج أن المثلث OHA قائم في H . إذاً: $\tan \theta = \frac{AH}{OH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ منه $\theta = \frac{\pi}{6}$.

للأسطوانة الدورانية Ψ معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 = r^2$

بما أن $B \in \Psi$ فإن: $1^2 + 2^2 = r^2$ أي $r^2 = 5$ وبالتالي: $\Psi: x^2 + y^2 = 5$

معادلة سطح الكرة S هي: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$

$M(x,y,z) \in \Psi \cap S$ معناه $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 3 \end{cases}$

هي إتحاد الدائرتين (C) و (C') ،

(C) مركزها $\omega(0;0;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z = -1$.

(C') مركزها $\omega'(0;0;3)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z = 3$.

الدالة ذات متغيرين

$B(2;0;4)$ ، $A(1;-1;0)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نقطتان من هذا الفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z = x^2 - y^2$

بيّن أن المستقيم (AB) محتوي في السطح (Γ) .

3

• السطح الذي معادلته $z = xy$ يدعى مجسم زائدي دوراني *hyperboloi de*.

منحنياته من المستوى هي قطوع زائدة معادلته $xy = k$ حيث k عدد حقيقي غير

معدوم.

في حالة $k = 0$ نحصل على إتحاد المحورين (Ox) و (Oy) .

تمارين محلولة

السطوح

Σ سطح معادلته $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$

اكتب معادلة Σ بالشكل: $z = (x-a)^2 + y^2 + b$

حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

استنتج أن Σ محتواة في نصف الفضاء المعرف بـ: $z \geq -3$.

1

الحل: لدينا $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$ تكافئ $z = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2$

تكافئ $z = (x-1)^2 + y^2 - 3$

إذاً: $a = 1$ و $b = -3$.

من أجل كل x و y من \mathbb{R} ، $(x-1)^2 + y^2 \geq 0$ وبالتالي $z \geq -3$

من أجل كل نقطة $M(x,y,z) \in \Sigma$ من الفضاء، معناه $M(x,y,z) \in \Sigma$

منه $z \geq -3$.

أي Σ محتواة في نصف الفضاء المعرف

بـ: x و y من \mathbb{R} و $z \geq -3$.

استلزام

إذا: النقطة $M_0(0;0;2)$ ذروة عظمى وحيدة للسطح (Γ) .

دراسة سطح معادلته من الشكل $z = f(x; y)$

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

• عيّن تقاطع السطح (Γ) مع كل من المستويين: $(P): x = 0$ و

$(P'): y = 2$.

• ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k مجموعة تقاطع (Γ) مع

المستوي $(P_k): z = k$.

5

الحل: من أجل كل نقطة $M(x; y; z)$ من الفضاء،

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2}x^2 \\ x = 0 \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ x = 0 \end{array} \right. \text{ معناه } M(x; y; z) \in (\Gamma) \cap (P)$$

معادلته $z = \frac{1}{2}y^2$ في المستوي (P) .

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y = 2 \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ y = 2 \end{array} \right. \text{ معناه } M(x; y; z) \in (\Gamma) \cap (P')$$

معادلته $z = \frac{1}{2}x^2 + 2$ في المستوي (P') .

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2k \\ z = k \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ z = k \end{array} \right. \text{ معناه } M(x; y; z) \in (\Gamma) \cap (P_k)$$

نناقش ثلاثة حالات $(k > 0, k = 0, k < 0)$

في حالة $k < 0$. الكتابة $x^2 + y^2 = 2k$ مستحيلة (مجموع مربعين هو عدد موجب)

إذا: $(\Gamma) \cap (P_k) = \emptyset$.

$$\text{في حالة } k = 0. \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 0 \\ z = k \end{array} \right. \text{ تكافئ } x = 0 \text{ و } y = 0 \text{ و } z = 0. \text{ إذا: } (\Gamma) \cap (P_k) = \{O\}$$

الحل: لدينا: من أجل كل نقطة $M(x; y; z) \in (AB)$ من الفضاء،

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ أي: } \overline{AM} = k \overline{AB} \text{ معناه}$$

$$\text{وبالتالي: } \begin{cases} x = k+1 \\ y = k-1 \\ z = 4k \end{cases} \text{ هو تمثيل ديكارتي للمستقيم } (AB).$$

هل إحداثيات نقطة M من المستقيم (AB) تحقق معادلة (Γ) ؟

$$(k+1)^2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 + 2k - 1 = 4k = z$$

الدالة ذات متغيرين

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z = 2e^{-(x^2 + y^2)}$.

• يبين أن السطح (Γ) محصور بين المستويين الذين معادلتهما $z = 0$ و $z = 2$.

• يبين أن السطح (Γ) يقبل ذروة عظمى وحيدة يطلب تعيينها.

4

الحل: من أجل كل نقطة $M(x; y; z) \in (\Gamma)$ من الفضاء،

$$\text{معناه } z = 2e^{-(x^2 + y^2)}$$

لدينا: من أجل كل x و y من \mathbb{R} ، $x^2 + y^2 \geq 0$ وبالتالي $-(x^2 + y^2) \leq 0$

أي $e^{-x^2 - y^2} \leq e^0$ يعني أن $0 < z \leq 2$ كون العدد الأسّي e^x موجب تماماً.

إذا: (Γ) محصور بين المستويين الذين معادلتهما $z = 0$ و $z = 2$. (دون أن يقطع المستوي $z = 0$)

لدينا النقطة $M_0(0;0;2)$ تنتمي إلى السطح (Γ) ، ومن الحصر السابق، كل نقطة من

(Γ) تحقق $z \leq 2$ فإن $M_0(0;0;2)$ ذروة عظمى للسطح (Γ) . هل هي وحيدة؟

نبحث عن x و y من \mathbb{R} علماً أن $z = 2$.

$$2 = 2e^{-(x^2 + y^2)} \text{ يكافئ } -(x^2 + y^2) = 0 \text{ يكافئ } x = 0 \text{ و } y = 0$$

5. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z = f(x; y)$.

من أجل كل عدد حقيقي k ، المنحني ذي المستوى k للدالة f هو المستقيم الذي يشمل

النقطة $A(-k; k+1; k)$ وشعاع توجيهه $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$. نعرف على السطح (Γ) والدالة f .

6. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) ذي المعادلة

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1$$

• ما هي النقط من (Γ) الأقرب إلى المحور (Oz) ؟

• A نقطة كيفية من (Γ) ، كم عدد المستقيمات التي تشمل A ومحتواة في السطح (Γ) ؟

7. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته

$$z = x^2 - y^2$$

(P) ، (P') و (P'') ثلاثة مستويات معادلاتها $x = 2$ ، $y = 3$ و $z = -2$ على الترتيب.

• عيّن مقطع السطح (Γ) بكل من المستويين (P) و (P') .

• نعتبر المعلم للفضاء $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$ حيث: $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$ و $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$.

ونضع: $(x; y; z)$ و $(X; Y; Z)$ إحداثيات النقطة M في المعلمين $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$ على الترتيب.

أعط معادلة ديكارتية للسطح (Γ) في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$ ، ثم استنتج مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P'') .

8. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. f الدالة العددية للمتغيرين x و y

من R معرفة بالدستور: $f(x; y) = x^2 - 2x + y^2 + y - 1$ و (Γ) السطح الذي معادلته

$$z = f(x; y)$$

• اكتب $f(x; y)$ بالشكل: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية

يطلب تعيينها.

• بين أن الدالة f تقبل قيم حدية صغيرة يطلب تعيينها.

• عيّن مقطع السطح (Γ) بكل من المستويين: $(P): x = 1$ و $(P'): z = -1$.

في حالة $k > 0$. الجملة $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2k \\ z = k \end{cases}$ تعين دائرة. إذا: $(\Gamma) \cap (P_k)$ الدائرة التي مركزها

$\Omega(0; 0; k)$ ونصف قطرها $\sqrt{2k}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z = k$.

تمارين للتدريب

1. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Σ) الاسطوانة الدورانية التي

محورها (Oz) وتشمل النقطة $A(1; 2; 3)$.

عيّن معادلة ديكارتية للاسطوانة (Σ) ، ثم عيّن مقطع (Σ) بكل من المستويات التي

معادلاتها: $x = 2$ ، $y = -3$ و $z = -4$.

2. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Σ) المخروط الدوراني الذي

محوره (Oz) ورأسه O ويشمل النقطة $A(1; 2; 3)$.

عيّن معادلة ديكارتية للمخروط (Σ) ، ثم عيّن مقطع (Σ) بكل من المستويات التي

معادلاتها: $x = y$ و $z = 1$ ، $z = -2$.

3. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Γ) المخروط الدوراني الذي محوره

(Oz) ورأسه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

تحقق أن النقطة $A(1; \sqrt{2}; 1)$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم أعط معادلة للمخروط (Γ) .

لتكن (Σ) سطح الكرة التي مركزها $\Omega(0; 0; 1)$ ونصف قطرها 1،

عيّن المجموعة $(\Gamma) \cap (\Sigma)$.

4. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (D) استقيم الذي يشمل أنبداً O

وشعاع توجيهه $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$

(Γ) المخروط الدوراني الذي رأسه O ومحوره (Oz) ويشمل المستقيم (D) .

• أعط معادلة للمخروط الدوراني (Γ) .

• عيّن قيمة العدد الحقيقي الموجب تماماً a بحيث يكون مقطع المخروط (Γ) بالمستوي ذي

المعادلة $z = a$ هو دائرة نصف قطرها 2 يطلب تعيين مركزها.

• عيّن تقاطع السطح (Γ) مع سطح الكرة التي مركزها $\Omega\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

ونصف قطرها 1.

9. $(O; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

• بيّن ان السطح (Γ) محصور بين المستويين التاميين معادلتهما $z = 0$ و $z = 2$.

• نعتبر المستوي (P_k) الذي معادلته $z = k$.

• عيّن تقاطع السطح (Γ) مع المستوي (P_1) .

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P_k) .

• ارسم المساقط العمودية لمقاطع السطح (Γ) مع كل من المستويات $(P_{0.5})$ ،

(P_1) ، $(P_{1.5})$ و (P_2) على المستوي المزود بالمعلم $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

10. $(O; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي

$$\text{معادلته } z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

من أجل كل عدد حقيقي k ، نضع: $(P_k): z = k$ و $(\Pi_k): x = k$.

• بيّن أن السطح (Γ) يقبل ذروة صغرى $A(0; 0; 1)$.

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P_k) .

• نضع: $\bar{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{k} - \bar{j})$ و $\bar{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{j} + \bar{k})$ ، النقطة ذات

الإحداثيات $(k; 0; 0)$.

تأكد من أن $(I_k; \bar{u}; \bar{v})$ معلم متعامد ومتجانس.

• باستعمال المعلم $(I_k; \bar{u}; \bar{v})$ عيّن مقطع السطح (Γ) بالمستوي (Π_k) .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير



و النجاح و المغفرة

Hard_equation