الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الحل المفصل لسلسلة الدوال اللوغاريتمية

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

التمرين 01

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها
2. أ/ بين أن المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1{,}5;2[$

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II- f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا
2. أحسب $f'(x)$، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها
3. بين أن $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$
4. أ/ أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب/ أرسم (C_f) و (Δ)

5. ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x+m$
6. h هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{|\ln x|}{x^2+1}$

إشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه

حل تمرين 01

1. أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

❖ أولا النهايات

لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[1+x^2]=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[x^2\ln x]=0\end{cases}$ ، ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=1$

$$\lim_{x\to+\infty}[1+x^2-2x^2\ln x]=+\infty-\infty$$

هي حالة عدم تعيين ، لإزالتها نقوم بإستخراج x^2 كعامل مشترك : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)\right]=-\infty$

❖ ثانيا الإشتقاق : الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x - 4x\ln x + \frac{1}{x}(-2x^2) = -4x\ln x$$

بما أن $x \in]0;+\infty[$ ، فإن $-4x < 0$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ عكس إشارة $\ln x$ ، ومنه

x	0		1		$+\infty$
$-4x$	0	$-$		$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$		$-$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2 أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1{,}5;2[$

الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $[1.5;2]$ ولدينا : $\begin{cases} g(1.5) = 1.42 \\ g(2) = -0.54 \end{cases}$ ، ومنه $g(1{,}5) \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1{,}5;2[$

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II- f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{\ln x}{x^2+1}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln x}{x^2+1}\right] = \frac{+\infty}{+\infty}$$

هي حالة عدم تعيين لإزالتها نقوم بإستخراج x كعامل مشترك $0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{\ln x}{x}}{x+\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right]$

2 أحسب $f'(x)$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2+1) - 2x\ln x}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{x^2+1-2x^2\ln x}{x}}{(x^2+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$$

بما أن $x(x^2+1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

❸ بين أن $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا : $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{\alpha^2+1}$ ....(1) ، ولدينا مما سبق $g(\alpha)=0$ أي $1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha=0$ ومنه

$$\ln\alpha=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}\ \ldots\ldots(2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد $f(\alpha)=\frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2+1}=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}\times\frac{1}{\alpha^2+1}=\frac{1}{2\alpha^2}$

و . هـ . م

استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

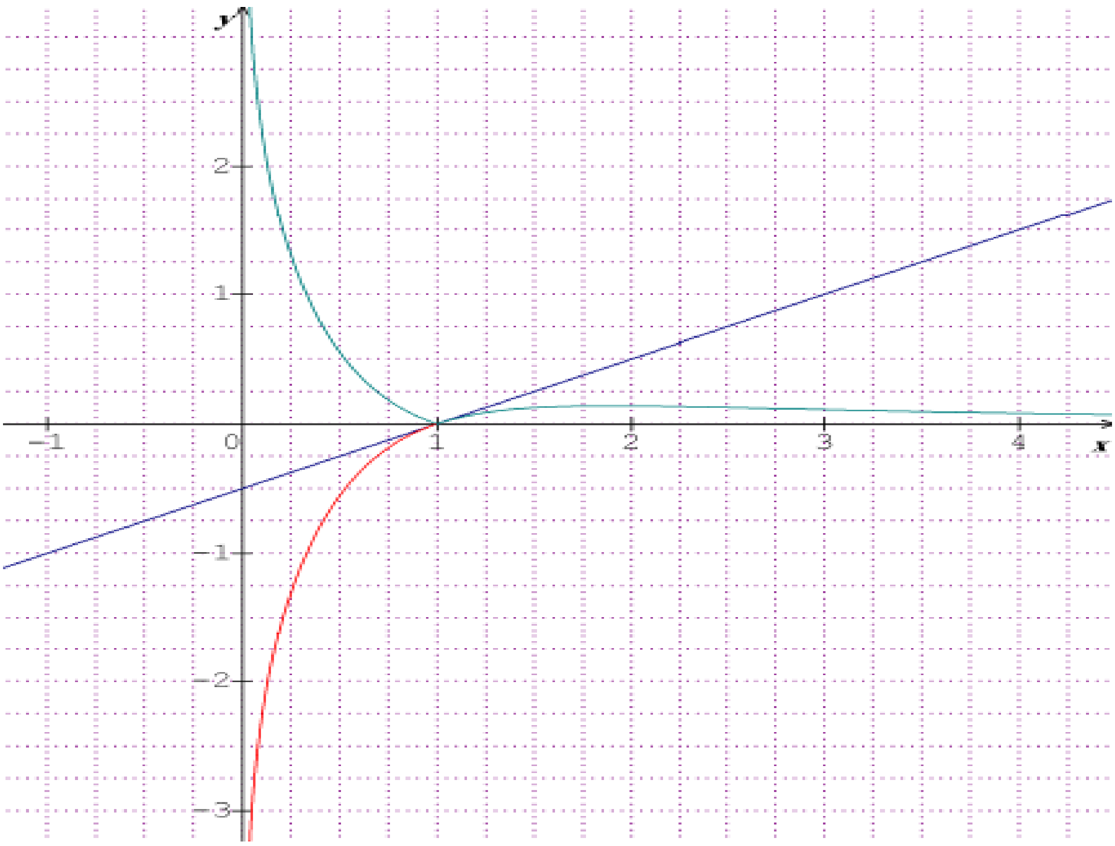
لدينا : $1.5<\alpha<2$ ، يكافئ $2.25<\alpha^2<4$ ، يكافئ $4.5<2\alpha^2<8$ ، يكافئ $\frac{1}{8}<\frac{1}{2\alpha^2}<\frac{1}{4.5}$

$$0.12<f(\alpha)<0.22$$

❹ أ/ أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(\Delta): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$(\Delta): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$(\Delta): y=\frac{1}{2}(x-1)$$

ب/ أرسم (C_f) و (Δ)



❺ ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x+m$

حلول المعادلة بيانيا هو فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x+m$

قيم m	المناقشة
$m\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$	للمعادلة حلان متمايزان
$m=-\frac{1}{2}$	للمعادلة حلا وحيدا
$m\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$	المعادلة ليس لها حلول

❻ h هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{|\ln x|}{x^2+1}$

إشرح كيف يمكن رسم (C_h)إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه

أولا يجب أن نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x^2+1}=f(x) & ;\ln x\geq 0\\ -\dfrac{\ln x}{x^2+1}=-f(x) & ;\ln x\leq 0\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x^2+1}=f(x) & ;x\geq 1\\ -\dfrac{\ln x}{x^2+1}=-f(x) & ;0<x\leq 1\end{cases}$$

لما يكون $x\geq 1$ فإن $h(x)=f(x)$ ، ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

لما يكون $0<x\leq 1$ فإن $h(x)=-f(x)$ ، ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

التمرين 02

I- نعتبر الدالة h المعرفة $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\ln(1+e^x)$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $h(x)=x+\ln(1+e^{-x})$

❷ أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

❸ أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى(C) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (Δ) مع (C)

ج/ أحسب $h(0)$ ، و فسر النتيجة هندسيا ، ثم أرسم (C)

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln(1+e^{-|x|})$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

❹ أ/ برهن أن $f(x)=h(x)$ على مجال يطلب تعيينه

ب/ بين أن محور التراتيب هو محور تناظر للدالة f

❺ إشرح كيف يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق

❻ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=-m$ حلين مختلفين في الإشارة

حل تمرين	02

❶ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $h(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$

$$\ln(1 + e^{x}) = \ln[e^{x}(e^{-x} + 1)] = \ln e^{x} + \ln(e^{-x} + 1) = x + (e^{-x} + 1) = h(x)$$

و . هـ . م

❷ أ/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} [\ln(1 + e^{x})] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} [\ln(1 + e^{x})] = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

ب/ أدرس تغير اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جتدول تغيراتها

الدالة h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا : $h'(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} > 0$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	0 ↗ $+\infty$

❸ أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} [h(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} [\ln(1 + e^{-x})] = 0$$

و . هـ . م

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (Δ) مع (C) : ندرس إشارة الفرق : $h(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$

لدينا $e^{-x} > 0$ ، أي $1 + e^{-x} > 1$ ، وبما أن الدالة $x \mapsto \ln x$ متزايدة تماما فإن $\ln(1 + e^{-x}) > 0$

ومنه $h(x) - x > 0$ ، و منه نستنتج أن (C) يقع فوق (Δ)

جـ / أحسب $h(0)$، و فسر النتيجة هندسيا ، ثم أرسم (C) .

$$h(0) = \ln(1 + e^{0}) = \ln 2$$

ومنه (C) يقطع محور التراتيب في النقطة $(0; \ln 2)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(1 + e^{-|x|})$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❹ أ/ برهن أن $f(x) = h(x)$ على مجال يطلب تعيينه

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + e^{-x}) = h(-x) & ; x \geq 0 \\ \ln(1 + e^{x}) = h(x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

من أجل $x \in]-\infty; 0]$ فإن $f(x) = h(x)$

ب/ بين أن محور التراتيب هو محور تناظر للدالة f

من أجل كل $x \in D_f$ ، و $-x \in D_f$

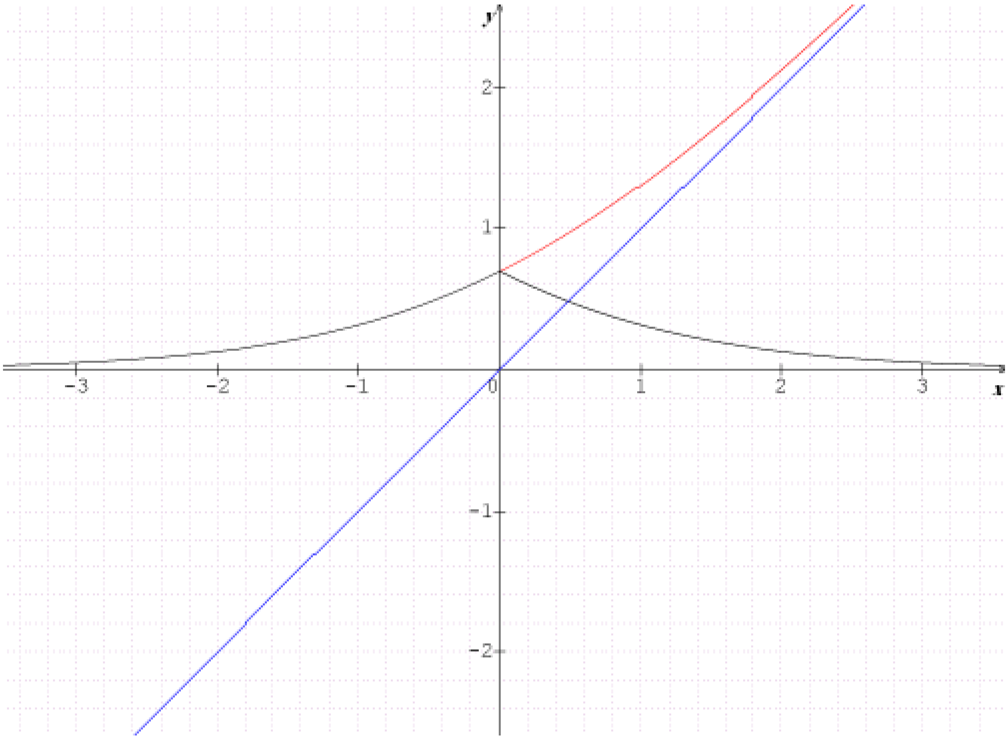
$$f(-x) = \ln\left(1 + e^{-|-x|}\right) = \ln\left(1 + e^{-|x|}\right) = f(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة f زوجية ، ومنه محور التراتيب هو محور تناظر للمنحني (C_f)

❺ إشرح كيف يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق

لما يكون $x \in]-\infty; 0]$ فإن $f(x) = h(x)$ ومنه (C_f) ينطبق على (C)

وبما أن الدالة f زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب .



❻ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = -m$ حلين مختلفين في الاشارة

$-m \in]0; \ln 2[$ أي $m \in]-\ln 2\,; 0[$

التمرين 03

I- لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

❶ ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$

❷ استنتج انه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $g(x) > 0$

II- f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ أ/ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$

جـ/ حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

❷ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

❸ بين انه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f) مواز للمستقيم (D) ثم اكتب معادلة له

❹ بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

❺ أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f)

❻ ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $mx - 2\ln(x) = 0$

حل تمرين 03

❶ ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$

❖ أولا النهايات

لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} [x^2+2] = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} [-2\ln x] = +\infty \end{cases}$ ، ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [x^2 + 2 - 2\ln x] = +\infty - \infty$$

هي حالة عدم تعيين لإزالتها نقوم بإستخراج x^2 كعامل مشترك : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \frac{2}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

❖ ثانيا الإشتقاق : الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$$

بما أن $x \in]0;+\infty[$ فإن إشارة المشتق من إشارة البسط

$g'(x) = 0$ ، معناه $2x^2 - 2 = 0$ ، ومنه $x^2 = 1$ ، ومنه $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin D_g \quad (\text{مرفوض}) \end{cases}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

احسب $g(1)$: لدينا $g(1) = 1^2 + 2 - 2\ln 1 = 3$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

❷ استنتج انه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $g(x) > 0$

نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى 3 ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$

فإن $g(x) \geq 3 > 0$ ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $g(x) > 0$

II- f دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} [\,x] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2\ln x}{x}\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} [x] = 0 \\ \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{2\ln x}{x}\right] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = -\infty$$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2\ln x}{x}\right] = 0$$

و.هـ.م

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (D) مع (C)

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = \frac{2\ln x}{x}$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ فإن إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ ومنه

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D) في $A(1;1)$	(C_f) فوق (D)	

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln x}{x^2} = 1 + \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

و.هـ.م

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2 > 0$ ، و $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

3 بين انه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحني (C_f) مواز للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة له

للبحث عن x_0 نحل المعادلة $f'(x_0) = 1$ ، أي $\frac{g(x_0)}{{x_0}^2} = 1$ ، أي $g(x_0) = {x_0}^2$

لدينا : ${x_0}^2 + 2 - 2\ln x_0 = {x_0}^2$ ، ومنه $2 - 2\ln x_0 = 0$ ، ومنه $2\ln x_0 = 2$ ، ومنه $\ln x_0 = 1$

ومنه $x_0 = e^1$

ومنه (C_f) يقبل مماسا وحيد (Δ) يوازي المستقيم (D) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = e^1$

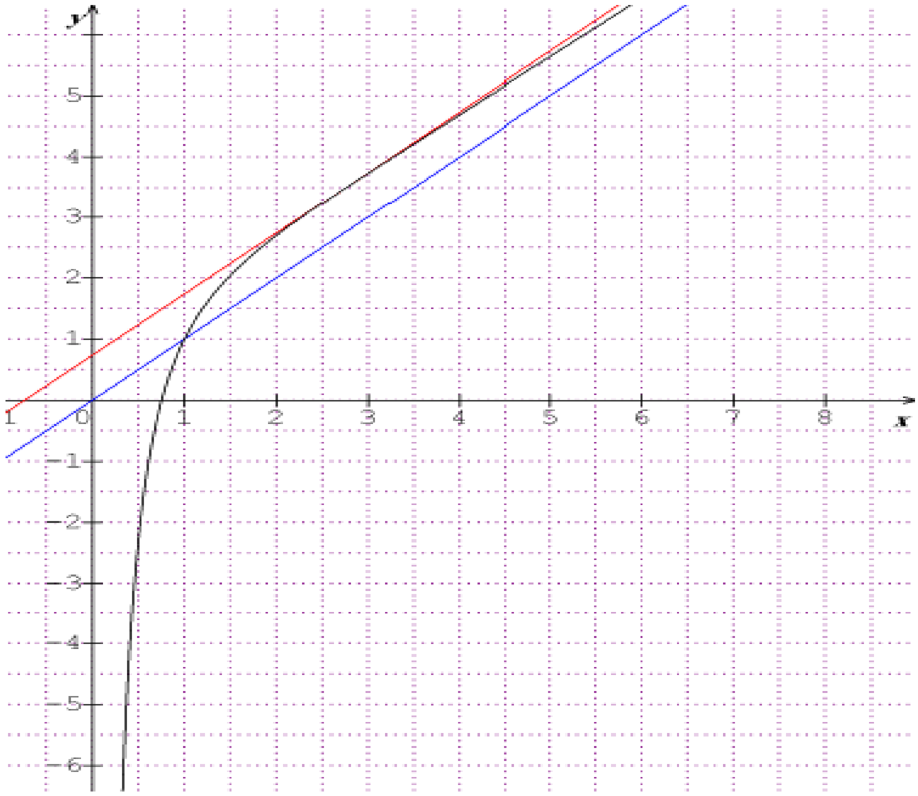
$$(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$(\Delta): y = f'(e^1)(x - e^1) + f(e^1)$$
$$(\Delta): y = 1(x - e^1) + e^1 + 2e^{-1}$$
$$(\Delta): y = x + 2e^{-1}$$

❹ بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ولدينا : $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = -2{,}22 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ ، ومنه $f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

❺ أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f)



❻ ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $mx - 2\ln(x) = 0$

المعادلة $mx - 2\ln(x) = 0$ تكافئ $2\ln(x) = mx$ تكافئ $\frac{2\ln(x)}{x} = m$

تكافئ $x + \frac{2\ln(x)}{x} = x + m$ تكافئ $f(x) = x + m$

حلول المعادلة بيانيا هو فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$

قيم m	المناقشة
$m \in]-\infty;0]$	للمعادلة حلا وحيدا
$m \in]0;2e^{-1}[$	للمعادلة حلان متمايزان
$m = 2e^{-1}$	للمعادلة حلا وحيدا
$m \in]2e^{-1};+\infty[$	المعادلة ليس لها حلول

☺

التمرين 04

I- h دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

❶ أحسب $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

❷ بين أنه من أجل x من $]-1;+\infty[$ بـ $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ثم شكل جدول تغيرات h

❸ أحسب $h(0)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x

II- f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

ب/ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن: $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

❸ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

❹ بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4

❺ أرسم (C_f)

حل تمرين 04

❶ أحسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1}[x^2+2x]=-1\\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1}[\ln(x+1)]=-\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} h(x)=-\infty$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2+2x]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+1)]=+\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$$

❷ بين أنه من أجل x من $]-1;+\infty[$ بـ $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ثم شكل جدول تغيرات h

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

و.هـ.م

بما أن $x\in]-1;+\infty[$ ، فإن $x+1>0$ ، ولدينا $1+2(x+1)^2>0$

ومنه $h'(x)>0$ ، إذن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$	‖ +	
$h(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

❸ أحسب $h(0)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x

$$h(0)=0^2+2(0)+\ln(0+1)=0$$

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II- f دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [x-1] = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$$

ومنه المستقيم $x = -1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ برهن أن: $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

بوضع $u = e^t$ أي $\ln u = t$

لما $t \to +\infty$ فإن $u \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{u}}{\ln u} = +\infty$$

بما أن $\frac{\ln u}{u} = \frac{1}{\frac{\mathrm{u}}{\ln u}}$ ، فإن $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{u}}{\ln u}} = 0$

و . هـ . م

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = +\infty$$

2 أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = 0$$

ومنه نستنتج أن المستقيم $(D): y = x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

بما أن $x \in]-1; +\infty[$ ، فإن $x + 1 > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-\ln(x+1)$

$-\ln(x+1) \geq 0$ ، يكافئ $\ln(x+1) \leq 0$ ، يكافئ $\ln(x+1) \leq \ln 1$ ، يكافئ $x + 1 \leq 1$

يكافئ $x \leq 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x) - (x-1)$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (D) في $A(0;-1)$	(C_f) تحت (D)	

3 بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

و . هـ . م

بـما أن $(x+1)^2>0$ فإن إشارة المشتق من إشارة $h(x)$

ومنه نستنتج أن f متناقصة تـماما على $]-1;0]$ ومتزايدة تـماما على المـجال $[0;+\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

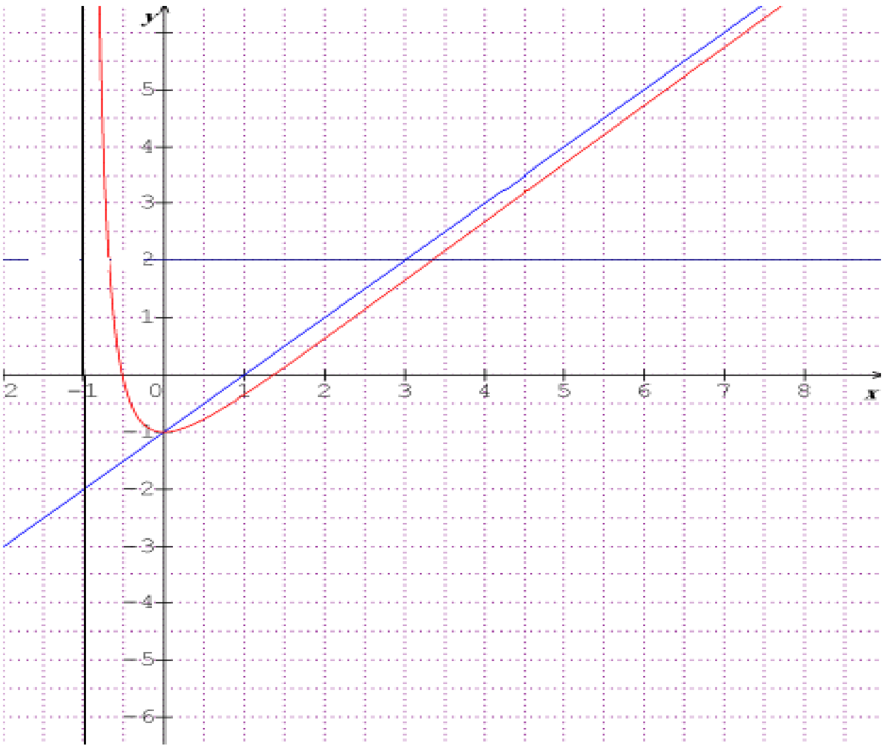
❹ بين أن المنحني (C_f) يقطع المستقيـــم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3{,}3$ و $3{,}4$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تـماما على المـجال $[3{,}3;3{,}4]$ ولدينا :

$$\begin{cases} f(3{,}3)=1{,}9<2 \\ f(3{,}4)=2{,}06>2 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحني (C_f)يقطع المستقيـــم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3{,}3$ و $3{,}4$

❺ أرسم (C_f)



التمرين 05

I- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=1-\frac{\ln x^2}{x}$، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أحسب $f(-x)+f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

❷ أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم استنتج النهايتين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$، وفسر النتائج هندسيا

❸ أحسب$f'(x)$ وأدرس إشارته ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

❹ أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y = 1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما

❺ أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$

ب/ أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

❻ أثبت أن للمنحنى (C_f) مماسا وحيدا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما ، ثم أكتب معادلة للمماس (T)

❼ أ/ أرسم (T)، (Δ) و (C_f)

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$

II - h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$، (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ بين أن h دالة زوجية

❷ دون دراسة تغيرات الدالة h ، ارسم (C_h) معللا إجابتك

حل تمرين 05

❶ أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)

أولا : نحسب $f(-x)$: $f(-x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} = 1 + \frac{\ln x^2}{x}$

بالتعويض نجد $f(-x) + f(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2$

لدينا من جهة : $f(-x) + f(x) = 2$

ومن جهة أخرى : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 2 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

ومنه نستنتج أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)

❷ أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{\ln x^2}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{2\ln|x|}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{2\ln x}{x}\right] = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[1 - \frac{\ln x^2}{x}\right] = +\infty$$

استنتج النهايتين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$

لدينا مما سبق : $f(-x) + f(x) = 2$ ومنه : $f(x) = 2 - f(-x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}}[2 - f(-x)] = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}[2 - f(x)] = 2 - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[2 - f(-x)] = \lim_{x\to+\infty}[2 - f(x)] = 2 - 1 = 1$$

تفسير النتائج هندسيا

المستقيم $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

المستقيم $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

❸ أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارته ، ثم شكل جدول تغيرات f

$$f'(x) = -\frac{\frac{2}{x}(x) - \ln x^2}{x^2} = -\frac{2 - \ln x^2}{x^2} = \frac{-2 + \ln x^2}{x^2}$$

بما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-2 + \ln x^2)$

$-2 + \ln x^2 \geq 0$ ، يكافئ : $\ln x^2 \geq 2$ ، يكافئ : $x^2 \geq e^2$ ، يكافئ : $x < -e$ و $x > e$

$x \in]-\infty; -e] \cup [e; +\infty[$

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -e]$ و $[e; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $[-e; 0[$ و $]0; e]$

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\approx 1,7$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\approx 0,26$	↗	1

❹ أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y = 1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما

نحل المعادلة $f(x) = 1$

$1 - \frac{\ln x^2}{x} = 1$ ، يكافئ $-\frac{\ln x^2}{x} = 0$ ، يكافئ $\frac{\ln x^2}{x} = 0$ ، يكافئ $\ln x^2 = 0$ ، يكافئ $x^2 = 1$

$x = 1$ أو $x = -1$

ومنه المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y = 1$ في النقطتين $(-1; 1)$ و $(1; 1)$

❺ أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ ولدينا : $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,7 \end{cases}$ ، $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$

ب/ أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(D): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$(D): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$
$$(D): y = -2x + 3$$

❻ أثبت أن للمنحنى (C_f) مماسا وحيدا (T) يشمل النقطة $A(0\,;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما ، ثم أكتب معادلة للمماس (T)

للبحث عن x_0 نحل المعادلة $1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$

$$1 = -x_0 \times f'(x_0) + f(x_0)$$
$$1 = -x_0\left(\frac{-2 + \ln {x_0}^2}{{x_0}^2}\right) + 1 - \frac{\ln {x_0}^2}{x_0}$$

$$0 = \frac{2-\ln {x_0}^2}{x_0} - \frac{\ln {x_0}^2}{x_0}$$
$$\frac{2-2\ln {x_0}^2}{x_0} = 0$$
$$2-2\ln {x_0}^2 = 0$$
$$\ln {x_0}^2 = 1$$
$${x_0}^2 = e^1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{e^1} \\ x_0 = -\sqrt{e^1} \end{cases}$$

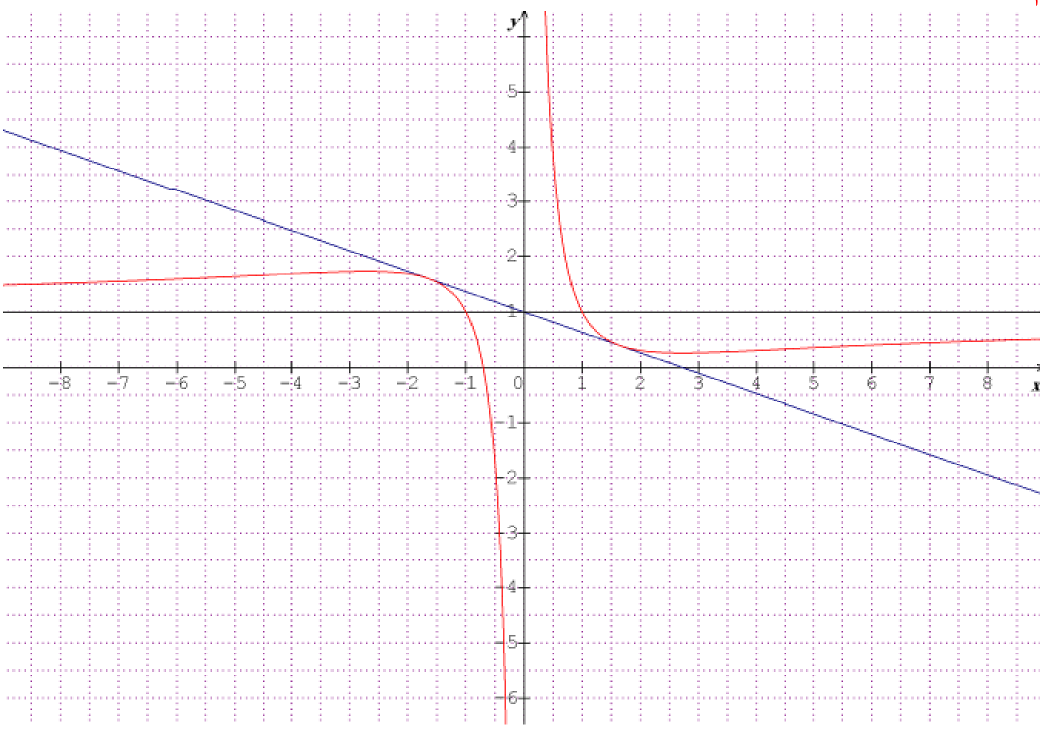
ومنه المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يشمل النقطة $A(0\,;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في النقطتين

$\left(\sqrt{e^1};1-\frac{1}{\sqrt{e^1}}\right)$ ، و $\left(-\sqrt{e^1};1+\frac{1}{\sqrt{e^1}}\right)$

أكتب معادلة للمماس (T) : الأمر سيان سواء عوضنا بـ $x_0 = \sqrt{e^1}$ أو $x_0 = -\sqrt{e^1}$

$$(\mathrm{T}): y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$
$$(\mathrm{T}): y = f'\left(\sqrt{e^1}\right)\left(x-\sqrt{e^1}\right) + f\left(\sqrt{e^1}\right)$$
$$(\mathrm{D}): y = -\frac{1}{e}x + 1$$

❼ أ/ أرسم (T) ، (Δ) و (C_f)



ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$

للبحث عن النقطة الثابتة نتبع الخطوات التالية : $y = mx + 1$ أي $y - mx - 1 = 0$

$$\begin{cases} y-1=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

ومنه جميع المستقيمات تشمل النقطة $A(0;1)$

- ✓ إذا كان $m \in \left]-\infty;-\frac{1}{e}\right[$ ، فإن للمعادلة لا تقبل حلول
- ✓ إذا كان $m = -\frac{1}{e}$ ، للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

✓ إذا كان $m \in \left]-\frac{1}{e};0\right[$ ، فإن للمعادلة حلان موجبان معا وحلان سالبان معا

✓ إذا كان $m \in [0;+\infty[$ ، فإن للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

II - h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$، (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ بين أن h دالة زوجية

من أجل كل $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة h زوجية و . هـ . م

❷ دون دراسة تغيرات الدالة h ، ارسم (C_h) معللا إجابتك

أولا يجب أن نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\ln x^2}{x} & ; x > 0 \\ 1 - \dfrac{\ln x^2}{x} = f(x) & ; x < 0 \end{cases}$$

لما يكون $x \in]-\infty;0[$ فإن $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

وبما أن الدالة h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين 06 (رياضيات / تقني رياضي)

I- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x - x\ln x$

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بين أن المعادلة $g(x) = -1$ حلا وحيدا α حيث $3.5 < \alpha < 3.6$

❸ استنتج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0;+\infty[$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$ $\|\vec{j}\| = 4cm$

❶ بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$

❷ أ/ برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب/ بين أن الدالة f متزايدة على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة على $[\alpha;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

❸ أ/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب/ عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

❹ أ/ بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ب/ أرسم (C_f)

❺ نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي :

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \dots (E)$$

أ/ تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

ب/ عين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين

II- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ ، (C_h) منحناها البياني

أ/ بين أن الدالة h زوجية

ب/ ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

حل تمرين 06

I- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x - x\ln x$

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}[x - x\ln x] = 0$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x(1-\ln x)] = -\infty$$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 1 - \ln x + \frac{1}{x}(-x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$

❷ بين أن المعادلة $g(x) = -1$ حلا وحيدا α حيث $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[3{,}5;3{,}6]$ ولدينا :

$$\begin{cases} g(3{,}5) = -0{,}8 > -1 \\ g(3{,}6) = -1{,}01 < -1 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = -1$ حلا وحيدا α حيث $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$

❸ استنتج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)+1$	‖	$+$	0	$-$	

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

❶ بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربـين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{\ln x}{x+1}\right] = -\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x+1} \times \frac{x}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1}\right] = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

❷ أ/ برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{g(x)+1}{x}}{(x+1)^2} = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

و . هـ . م

ب/ بين أن الدالة f متزايدة على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة على $[\alpha;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x(x+1)^2 > 0$ ، فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)+1$

ومنه نستنتج أن الدالة f متزايدة على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة على $[\alpha;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

❸ أ/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(\mathrm{T}): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$(\mathrm{T}): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$(\mathrm{T}): y = \frac{1}{2}(x-1)$$

ب/ عين دون حساب $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

حسب تعريف العدد المشتق فإن :

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)+1}{\alpha(\alpha+1)^2} = \frac{-1+1}{\alpha(\alpha+1)^2} = 0$$

ومنه المنحني (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \alpha$

❹ أ/ بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha+1} \ldots\ldots(1)$$

لدينا مما سبق $g(\alpha) = -1$ ، ومنه $\alpha - \alpha\ln\alpha = -1$ ، أي $\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha}$ ………(2)

بتعويض (2) في (1) نجد $f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}$

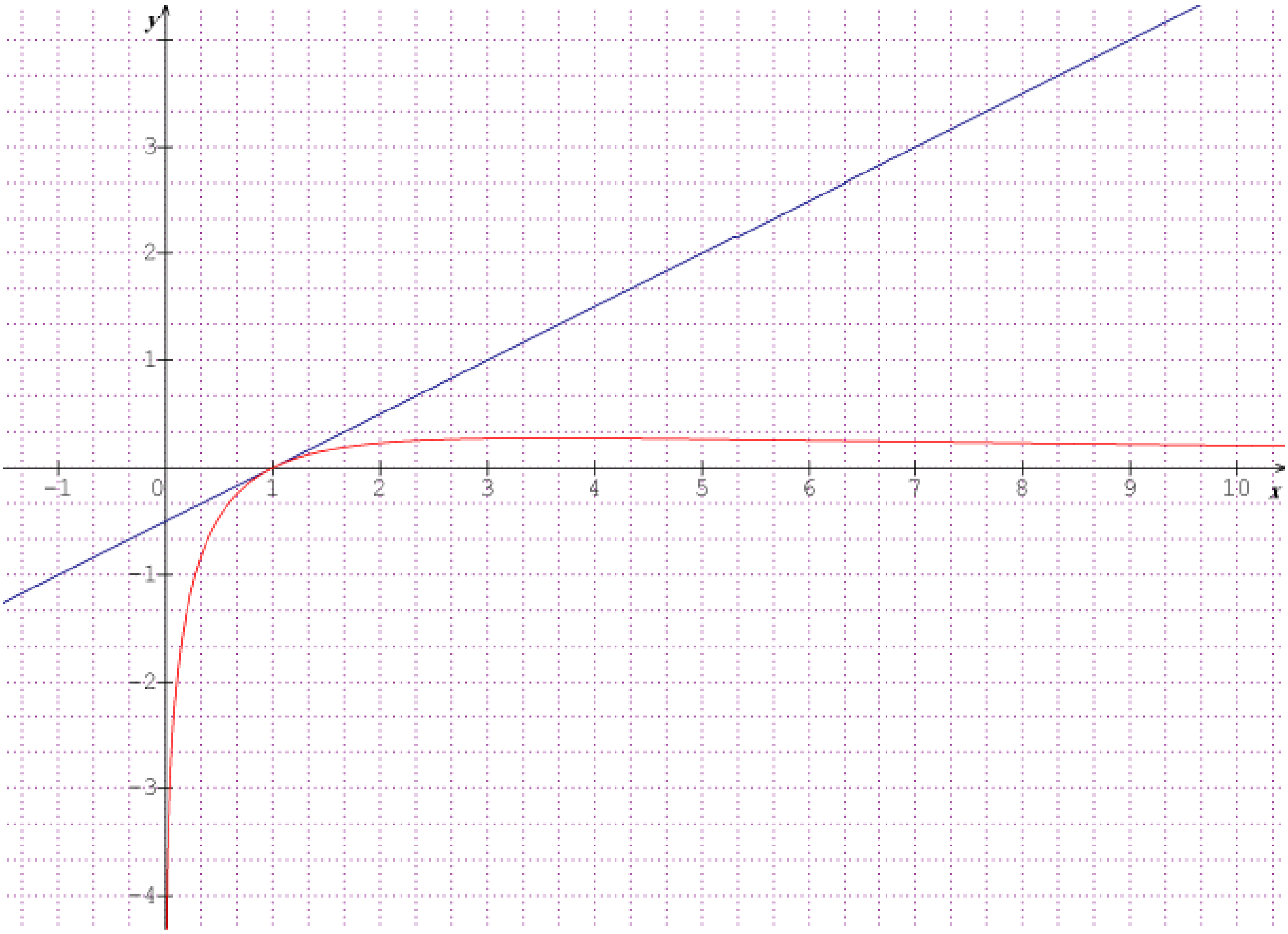
و . هـ . م

لدينا $3,5 < \alpha < 3,6$

ومنه $\frac{1}{3,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3,5}$

ومنه $0,28 < f(\alpha < 0,29$

ب/ أرسم (C_f)



❺ نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي :

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \ldots (E)$$

أ/ تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2)$$

$$x(x+1) - 2m(x+1) = 2\ln x$$

$$x - 2m = \frac{2\ln x}{x+1}$$

$$\frac{1}{2}x - m = \frac{\ln x}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - m$$

و . هـ . م

ب/ عين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين

$-m \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ ، أي $m \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

II- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x)=\frac{ln|x|}{-|x|-1}$ ، (C_h) منحناها البياني

أ/ بين أن الدالة h زوجية

من أجل كل $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$

$$h(-x)=\frac{ln|-x|}{-|-x|-1}=\frac{ln|x|}{-|x|-1}=h(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة h زوجية   و . هـ . م

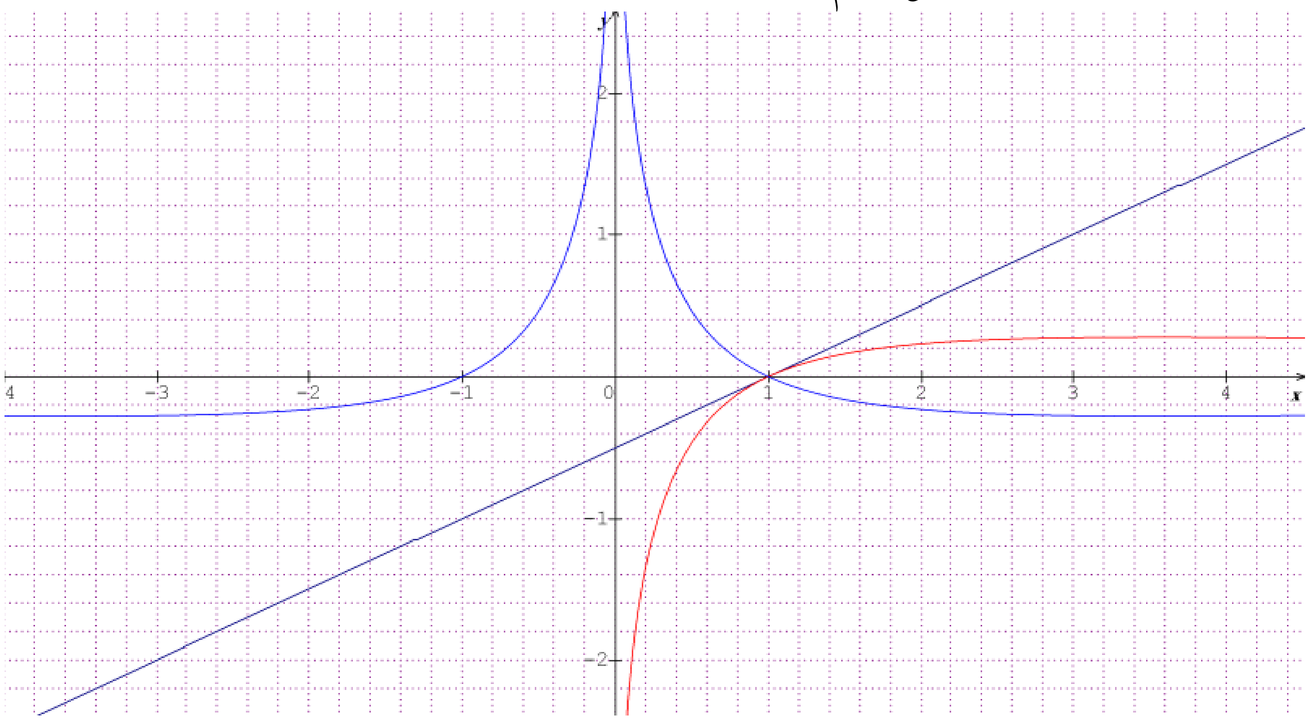
ب/ ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

أولا يجب أن نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{-x-1}=-f(x) & ;x>0\\ \dfrac{\ln(-x)}{x-1} & ;x<0\end{cases}$$

لما يكون $x>0$ فإن $h(x)=-f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أن الدالة h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب



التمرين 07

I- g الدالة العددية المعرفة $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-2\ln x$

❶ أ/ ادرس تغيرات الدالة g ، ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II- f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\frac{1}{x}(1+2\ln x)$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

ب/ بين ان f' مشتقة الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

❷ أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ج/ بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,5 < \alpha < 0,6$

❸ أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(x;2)$ مع $x \geq 1$

ب/ حل المعادلة $x^2 \times g'(x) - 2x \times g(x) = 0$، ثم بين أن $B\left(e; e + \frac{3}{e}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ج/ أنشئ (Δ) و (T) ، (C_f)

حل تمرين 07

I- g الدالة العددية المعرفة $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$

❶ أ/ ادرس تغيرات الدالة g

❖ أولا النهايات

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-2\ln x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 - 2\ln x = +\infty - \infty$$

هي حالة عد تعيين لإزالتها نقوم بإستخراج x^2 كعامل مشترك : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$

❖ ثانيا الإشتقاق : الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

بما أن $x \in]0; +\infty[$ ، فإن إشارة المشتق من إشارة البسط

$g'(x) = 0$ ، معناه $2x^2 - 2 = 0$ ، ومنه $x^2 = 1$ ، ومنه $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \quad (\text{مرفوض}) \end{cases}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; 1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى 2 ، ومنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) \geq 2 > 0$

ومنه بالتعدي $g(x) > 0$

II- f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\frac{1}{x}(1+2\ln x)$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$

$$\begin{cases}\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left[x+\frac{1}{x}\right]=+\infty\\ \lim_{\substack{x\to 0\\>}}[1+2\ln x]=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right]=+\infty$$

ب/ بين ان f' مشتقة الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}(1+2\ln x)+\frac{2}{x}\times\frac{1}{x}=1-\frac{1+2\ln x}{x^2}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-1-2\ln x+2}{x^2}$$

$$\frac{x^2+1-2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2>0$ و $g(x)>0$ فإن $f(x)>0$ ومنه نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$+\infty$

2 أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right]=0$$

ومنه نستنتج أن المستقيم $(\Delta):y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-x=\frac{1}{x}(1+2\ln x)$

بما أن $x\in]0;+\infty[$ ، فإن إشارة الفرق من إشارة $(1+2\ln x)$ ومنه

$1+2\ln x\geq 0$ يكافئ $2\ln x\geq -1$ يكافئ $\ln x\geq\frac{-1}{2}$ يكافئ $x\geq e^{\frac{-1}{2}}$

x	0		$e^{\frac{-1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(e^{\frac{-1}{2}};e^{\frac{-1}{2}})$	(C_f) فوق (Δ)	

ج/ بين أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,5<\alpha<0,6$

الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $[0,5;0,6]$ ولدينا : $\begin{cases} g(0,5)=-0,27 \\ g(0,6)=0,56 \end{cases}$ ، ومنه $g(0,5)\times g(0,6)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,5<\alpha<0,6$

❸ أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة $A(x;2)$ مع $x\geq 1$

للبحث عن x_0 نقوم بحل المعادلة $f(x_0)=2$ ومنه $x_0+\frac{1}{x_0}(1+2\ln x_0)=2$

يكافئ $x_0+\frac{1}{x_0}(1+2\ln x_0)-2=0$ ، يكافئ $x_0+\frac{1+2\ln x_0}{x_0}-2=0$

يكافئ $\frac{{x_0}^2+1+2\ln x_0-2x_0}{x_0}=0$ ، يكافئ ${x_0}^2+1+2\ln x_0-2x_0=0$ ، يكافئ $(x_0-1)^2+2\ln x_0=0$

$$\begin{cases} (x_0-1)^2=0 \\ \text{و} \\ 2\ln x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0-1=0 \\ \text{و} \\ \ln x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ \text{و} \\ x_0=1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{T}): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$(\mathrm{T}): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$(\mathrm{T}): y=2x$$

ب/ حل المعادلة $x^2\times g'(x)-2x\times g(x)=0$

$$x^2\times g'(x)-2x\times g(x)=0$$
$$x^2\left(\frac{2x^2-2}{x}\right)-2x(x^2+1-2\ln x)=0$$
$$x(2x^2-2)-2x(x^2+1-2\ln x)=0$$
$$x(2x^2-2-2x^2-2+4\ln x)=0$$
$$x(-4+4\ln x)=0$$
$$\begin{cases} x\neq 0 \\ -4+4\ln x=0 \end{cases} \Rightarrow \{\ln x=1 \Rightarrow \{x=e$$

ثم بين أن $B(e;e+\frac{3}{e})$ نقطة انعطاف لـ (C_f)

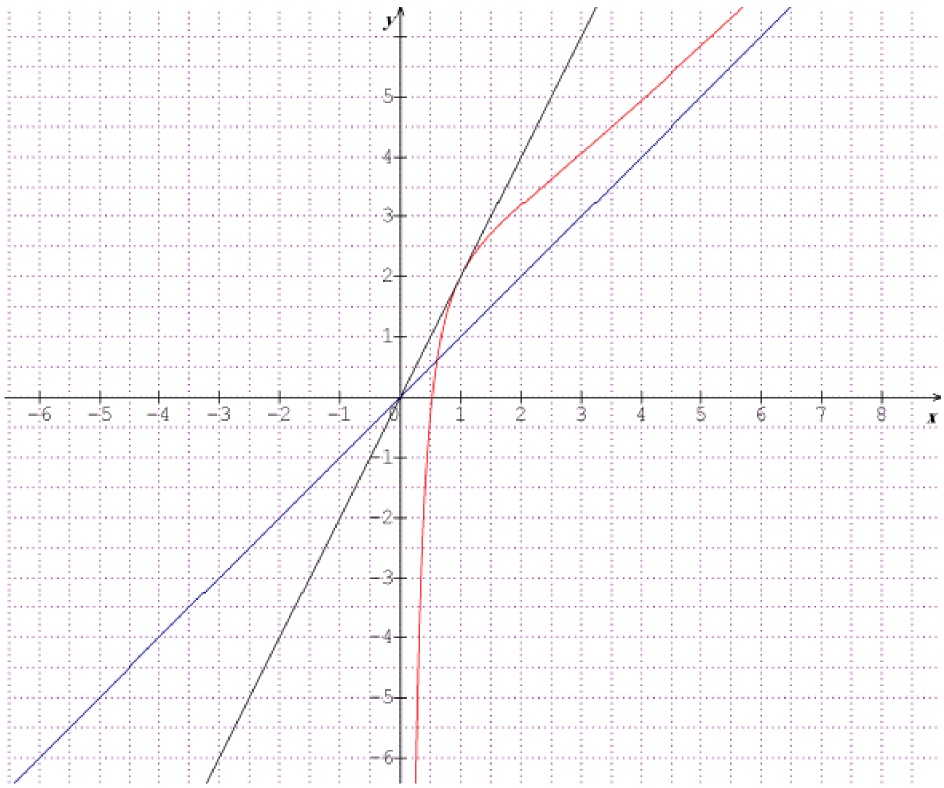
$$f''(x)=\frac{x^2\times g'(x)-2x\times g(x)}{x^4}$$

إشارة $f''(x)$ من إشارة $(-4+4\ln x)$

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

بما أن $f''(x)$ إنعدم عند $x=e$ مغيرا إشارته فإن النقطة $B(e;e+\frac{3}{e})$ نقطة انعطاف لـ (C_f)

ج/ أنشئ (Δ) و(T) ، (C_f)



التمرين	08

I-f دالة معرفة على المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[= D_f$ كمايلي: $f(x)=\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f: $f'(x)=\frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$ ثم إستنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول التغيرات

ب/ عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في نقطة ذات فاصلة 2

II-g دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

❶ أ/ بين أنه من اجل كل x من $]1;+\infty[$ فإن: $\frac{x+1}{x}>1$ ، ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

ج/ نسمي (C) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ ، ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C)

د/ أرسم (C) و (Δ) ثم المنحنى (C_f)

❷ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{m}\right)=0$

حل تمرين	08

I- f دالة معرفة على المجال $D_f =]-1;1[\cup]1;+\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to 1^{<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 1^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -1^{>}} f(x)$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^{>}} \left[\frac{1}{x-1}\right] = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to -1^{>}} [\ln(x+1)] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^{>}} f(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^{>}} \left[\frac{1}{x-1}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^{>}} [\ln(x+1)] = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^{>}} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^{<}} \left[\frac{1}{x-1}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^{<}} [\ln(x+1)] = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^{<}} f(x) = -\infty$$

$x = -1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x-1}\right] = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(x+1)] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

❷ أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f: $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$ ثم إستنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول التغيرات

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-x-1+x^2+1-2x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2-3x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$$

و . هـ . م

لدينا من أجل كل $x \in]-1;1[\cup]1;+\infty[$ فإن $x+1>0$ ، وبما أن $(x-1)^2>0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

x	-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-1;0]$ و $[3;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $[0;1[$ و $]1;3]$

x	-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 4$	↗	$+\infty$

ب/ عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في نقطة ذات فاصلة 2

$(\Delta): y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$(\Delta): y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$(\Delta): y = \frac{-2}{3}x + \frac{7}{3} + \ln 3$

g-II دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

❶ أ/ بين أنه من اجل كل x من $]1;+\infty[$ فإن: $\frac{x+1}{x}>1$

$\frac{x+1}{x}>1$ ، يكافئ $\frac{x+1}{x}-1>0$ ، يكافئ $\frac{x+1-x}{x}>0$ ، يكافئ $\frac{1}{x}>0$

وهو محقق دوما من أجل كل x من $]1;+\infty[$

استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$

لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[$ فإن $x-1>0$ ومنه $\frac{1}{x-1}>0$ ……… (*)

لدينا مما سبق من اجل كل x من $]1;+\infty[$ فإن: $\frac{x+1}{x}>1$ ، يكافئ $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)>0$ …..(**)

بجمع (*) مع (**) طرفا لطرف نجد $g(x)>0$

ب/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}\right]=0\\ \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=\ln 1=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_g) بجوار $+\infty$

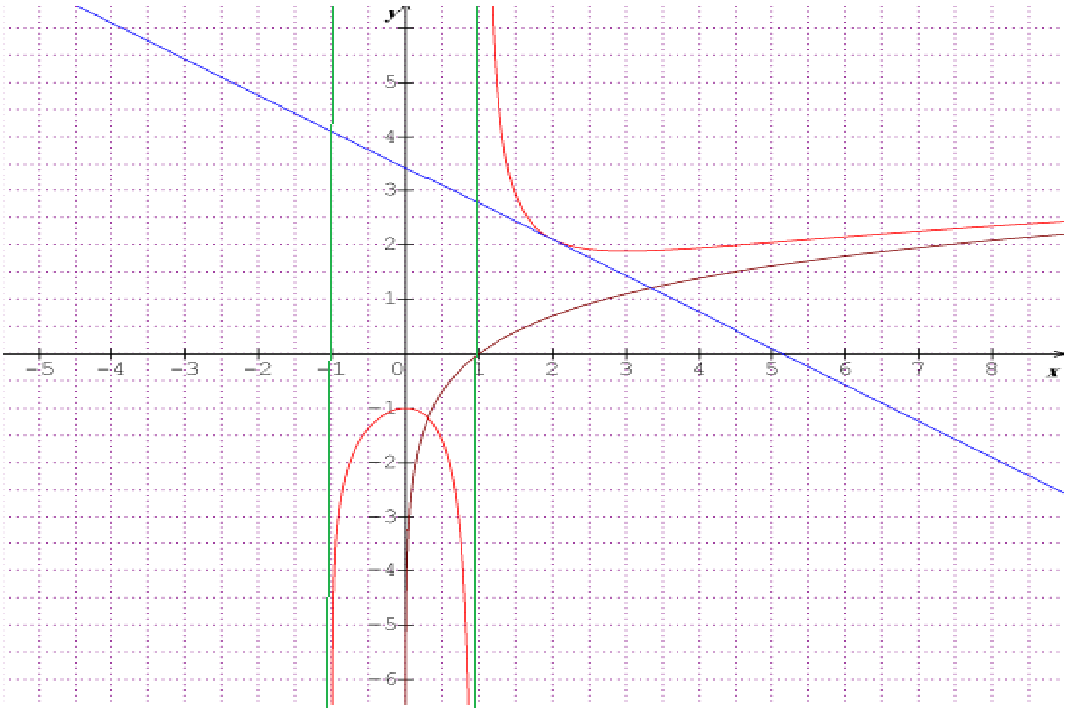
ج/ نسمي (C) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ ، ثم حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمنحني (C)

ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-\ln x=\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=g(x)>0$$

ومنه (C_f) فوق (C) على المجال $]1;+\infty[$

د/ أرسم (C) و (Δ) ثم المنحنى (C_f)



❷ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{m}\right)=0$

$$\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{m}\right)=0$$
$$\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)-\ln m=0$$
$$\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)=\ln m$$
$$\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)=\ln m$$
$$f(x)=ln\, m$$

ومنه حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=\ln m$

قيم $ln\, m$	قيم m	المناقشة
$ln\, m\in\left]-\infty;-1\right[$	$m\in\left]0;e^{-1}\right[$	حلان مختلفان في الإشارة
$ln\, m=-1$	$m=e^{-1}$	حلا مضاعف معدوم
$ln\, m\in\left]-1;\frac{1}{2}+\ln 4\right[$	$m\in\left]e^{-1};4\sqrt{e}\right[$	لا يوجد حلول
$ln\, m=\frac{1}{2}+\ln 4$	$m=4\sqrt{e}$	حل مضاعف موجب
$ln\, m\in\left]\frac{1}{2}+\ln 4\,;+\infty\right[$	$m\in\left]4\sqrt{e};+\infty\right[$	حلان موجبان

التمرين 09

I- g هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+3-2ln\, x$

❶ أدرس تغيرات الدالة g

❷ أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II- f هي الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{ln\, x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$

نسمي (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا $f(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

❷ أ/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$ ، فسر النتيجة المتحصل عليها هندسيا

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم انجز جدول تغيرات الدالة f

❸ أ/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

❹ أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C_f)

III- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{|x|}-\frac{\ln x^2}{|x|}\right]$ نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها في $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ/ أدرس شفعية الدالة h . ب/ اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h) في المعلم السابق

ج/ استنتج حلول المتراجحة $h(x) \geq -\frac{\sqrt{e}}{2}$

حل تمرين 09

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3 - 2ln\,x$

❶ أدرس تغيرات الدالة g

❖ أولا النهايات

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^2+3) = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-2\ln x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} [x^2 + 3 - 2\ln x] = +\infty - \infty$$

هي حالة عدم تعيين لإزالتها نقوم بإستخراج x^2 كعامل مشترك : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$

❖ ثانيا الإشتقاق : الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$$

بما أن $x \in]0;+\infty[$ ، فإن إشارة المشتق من إشارة البسط

$g'(x) = 0$ معناه $2x^2 - 2 = 0$ ، ومنه $2x^2 = 2$ ، ومنه $x^2 = 1$ ، ومنه $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \quad (\text{مرفوض}) \end{cases}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى 2 ، ومنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، فإن $g(x) \geq 4 > 0$

ومنه بالتعدي $g(x) > 0$

II- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{ln\,x}{x} + \frac{x^2-1}{2x}$

❶ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} + \frac{2x(2x) - 2(x^2-1)}{4x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{4x^2 - 2x^2 + 2}{4x^2}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{2x^2+2}{4x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{2(x^2+1)}{4x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{x^2+1}{2x^2}$$

$$= \frac{2 - 2\ln x + x^2 + 1}{2x^2} = \frac{x^2 + 3 - 2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

و.هـ.م

بما أن $2x^2 > 0$ ، و $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

❷ أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$ ، فسر النتيجة المتحصل عليها هندسيا

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^{>}} \left[\frac{\ln x}{x}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^{>}} \left[\frac{x^2 - 1}{2x}\right] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم انجز جدول تغيرات الدالة f

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - 1}{2x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{2}\right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $+$
$f(x)$	$\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

❸ أ/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} - \frac{1}{2}x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1 - x^2}{2x}\right]$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{-1}{2x}\right] = 0$$

ومنه نستنتج أن المستقيم $(D): y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{\ln x}{x} + \frac{-1}{2x} = \frac{2\ln x - 1}{2x}$

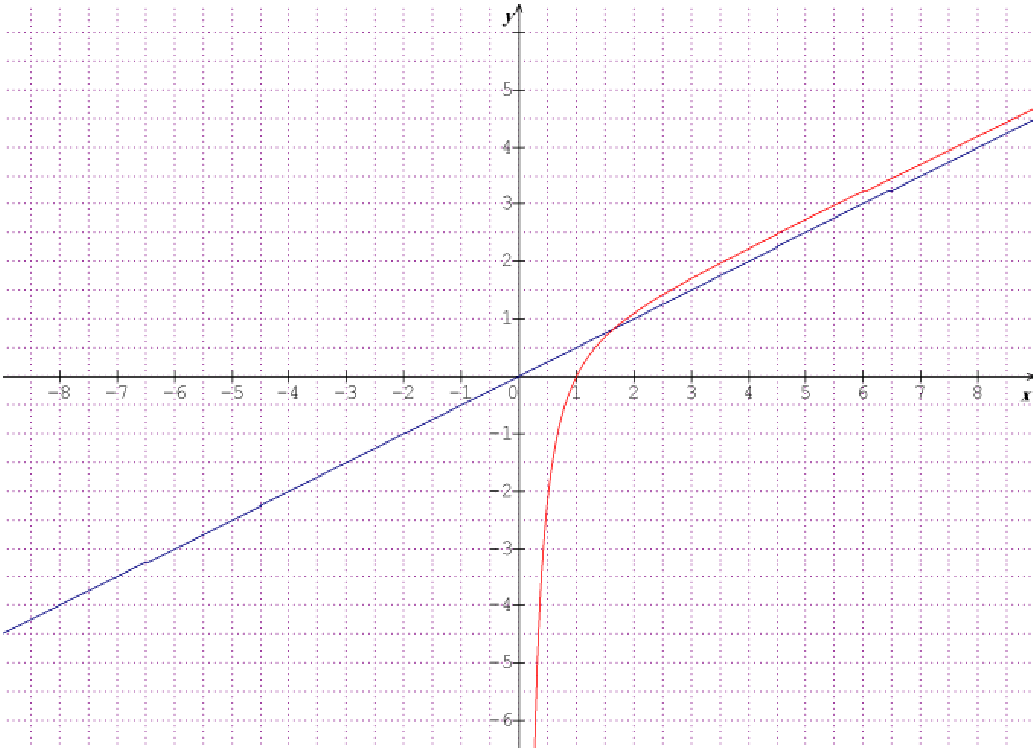
بما أن $x \in]0; +\infty[$ ، فإن إشارة الفرق من إشارة $2\ln x - 1$ ومنه

$2\ln x - 1 \geq 0$ ، يكافئ $2\ln x \geq 1$ ، $\ln x \geq \frac{1}{2}$ ، بما أن الدالة $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما فإن

$$x \geq e^{\frac{1}{2}}$$
$$x \geq \sqrt{e}$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D) في $A(\sqrt{e};\frac{\sqrt{e}}{2})$	(C_f) فوق (D)

❹ أنشئ المستقيـم (D) والمنحنى (C_f)



II- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{|x|}-\frac{\ln x^2}{|x|}\right]$ نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها في $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ/ أدرس شفعية الدالة h .

من أجل كل $x\in D_h$ ، و $-x\in D_h$

$$h(-x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-(-x)^2}{|-x|}-\frac{\ln(-x)^2}{|-x|}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{|x|}-\frac{\ln x^2}{|x|}\right]=h(x)$$

ومنه نستنتج أن الدالة h زوجية و . هـ . م

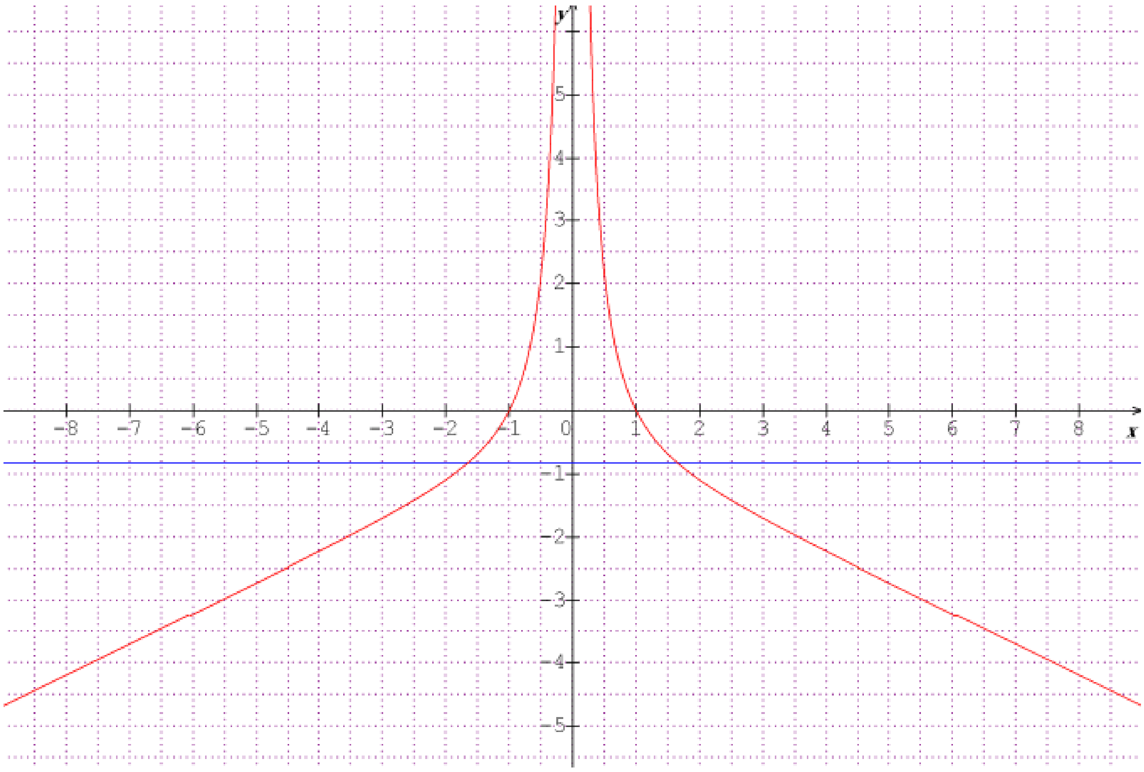
ب/ اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h) في المعلم السابق

لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، فإن $|x|=x$ ومنه

$$h(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{x}-\frac{\ln x^2}{x}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right]=\frac{1-x^2}{2x}-\frac{\ln x}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$$
$$=-f(x)$$

لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، فإن $h(x)=-f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب



ج/ استنتج حلول المتراجحة $h(x) \geq -\frac{\sqrt{e}}{2}$

حلول المتراجحة هي فواصل نقاط المنحني الواقعة فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{\sqrt{e}}{2}$

$x \in [-\sqrt{e}; 0[\cup]0; \sqrt{e}]$

التمرين 10

I- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = x^2 - lnx^2$، (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) > 0$

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x}\right)$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، أحسب $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2 f'(x) = -h(x)$

ب/ ادرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

3 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ و $(-x)$ من $\mathbb{R}^*$ فإن $f(-x) + f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟

4 أ/ بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0.3; 0.4[$

ب/ إستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا آخرا β يطلب تعيين حصرا له

5 بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادلتيهما

6 أ/ أنشئ (C_f) ، (T_1) و (T_2) ، (Δ)

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -\frac{1}{2}x + m$

❼ لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}-(x+1)-\frac{2}{x+1}\right)+2$

(C_k) تمثيلها البياني ، بين أنه يوجد تحويل بسيط يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_k)

حل تمرين 10

I- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=x^2-lnx^2$، (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أدرس إتجاه تغير الدالة h

الدالة h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$

المعادلة $g'(x)=0$ معناه $2x^2-2=0$ ، ومنه $2x^2=2$ ، ومنه $x^2=1$ ، ومنه إما $x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x^2-2$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

الدالة h متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجالين $[-1;0[$ و $[1;+\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	||	$\searrow$	1	$\nearrow$	

إستنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)>0$

❖ الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى 1 ، ومنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ ، فإن $h(x)\geq 1>0$

ومنه بالتعدي $h(x)>0$

❖ الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى 1 ، ومنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، فإن $h(x)\geq 1>0$

ومنه بالتعدي $h(x)>0$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $h(x)>0$

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، أحسب $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{2\ln|x|}{x}-x-\frac{2}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{2\ln x}{x}-x-\frac{2}{x}\right)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{2\ln|x|}{x}-x-\frac{2}{x}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\ln(-x)}{-x}-x-\frac{2}{x}\right)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)\right]=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)-x^2-2}{x}\right)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)\right]=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)-x^2-2}{x}\right)\right]=+\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

❷ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2 f'(x) = -h(x)$

يكفي أن نثبت أن : $f'(x) = -\frac{h(x)}{2x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\frac{2}{x}(x) - \ln(x^2)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-2 + \ln(x^2)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2 + \ln(x^2) - x^2 + 2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x^2) - x^2}{x^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - lnx^2}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{h(x)}{x^2}\right) = -\frac{h(x)}{2x^2}$$

و . هـ . م

ب/ ادرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

لدينا مما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $h(x) > 0$ ومنه $f'(x) < 0$

ومنه نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

ج/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{2}x\right] =$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x^2)}{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[-\frac{2\ln|x|}{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x\right]$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[-\frac{\ln|x|}{x} - \frac{1}{x}\right] = 0$$

ومنه نستنتج أن المستقيم $(\Delta): y = -\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ) : ندرس إشارة الفرق

$$f(x) + \frac{1}{2}x = -\frac{\ln(x^2)}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{-\ln(x^2) - 2}{2x}$$

$-\ln(x^2) - 2 \geq 0$ ، يكافئ $-\ln(x^2) \geq 2$ ، يكافئ $\ln(x^2) \leq -2$ ، يكافئ $x^2 \leq e^{-2}$

يكافئ $x^2 \leq \frac{1}{e^2}$ ، يكافئ $x \in \left[-\frac{1}{e}; 0\right[\cup \left]0; \frac{1}{e}\right]$

ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) في المجالين $\left[-\frac{1}{e}; 0\right[$ و $\left]0; \frac{1}{e}\right]$

(C_f) يقع فوق (Δ) في المجالين $\left]-\infty; -\frac{1}{e}\right]$ و $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

(C_f) يقطع (Δ) في النقطتين ذات الفاصلتين $x = \frac{1}{e}$ و $x = -\frac{1}{e}$

❸ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ و $(-x)$ من $\mathbb{R}^*$ فإن $f(-x)+f(x)=0$ ، ماذا تستنتج ؟

لـدينا : $f(-x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(-x)^2}{-x}-(-x)-\frac{2}{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x^2)}{x}+x+\frac{2}{x}\right)$

ولـدينا أيضا : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)=f(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x^2)}{x}+x+\frac{2}{x}\right)$

ومنه : $f(-x)+f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x^2)}{x}+x+\frac{2}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x^2)}{x}+x+\frac{2}{x}\right)=0$

و . هـ . م

ماذا تستنتج ؟

بـما أن $f(-x)+f(x)=0$ ، فإن $f(-x)=-f(x)$ ومنه نستنتج أن f دالة فردية

❹ أ/ بين أن الـمعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من الـمجال $]0,3;0,4[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $[0,3;0,4]$ و لدينا : $\begin{cases} f(0,3)=0,53 \\ f(0,4)=-041 \end{cases}$ ، ومنه $f(0,3)\times f(0,4)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وحيدا α من المجال $]0,3;0,4[$

ب/ إستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخرا β يطلب تعيين حصرا له

بـما أن f دالة فردية فإن الـمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخرا β حيث $-0,4<\beta<-0,3$

❺ بين أن الـمنحنى (C_f) يقبل مـماسين (T_1) و (T_2) يوازيان الـمستقيم (Δ) ، يطلب كـتابة معادلتيهما

نـحل الـمعادلة $f'(x_0)=-\frac{1}{2}$ ، ومنه $-\frac{h(x_0)}{2{x_0}^2}=-\frac{1}{2}$ ، $\frac{h(x_0)}{2{x_0}^2}=1$ ، ومنه $h(x_0)={x_0}^2$

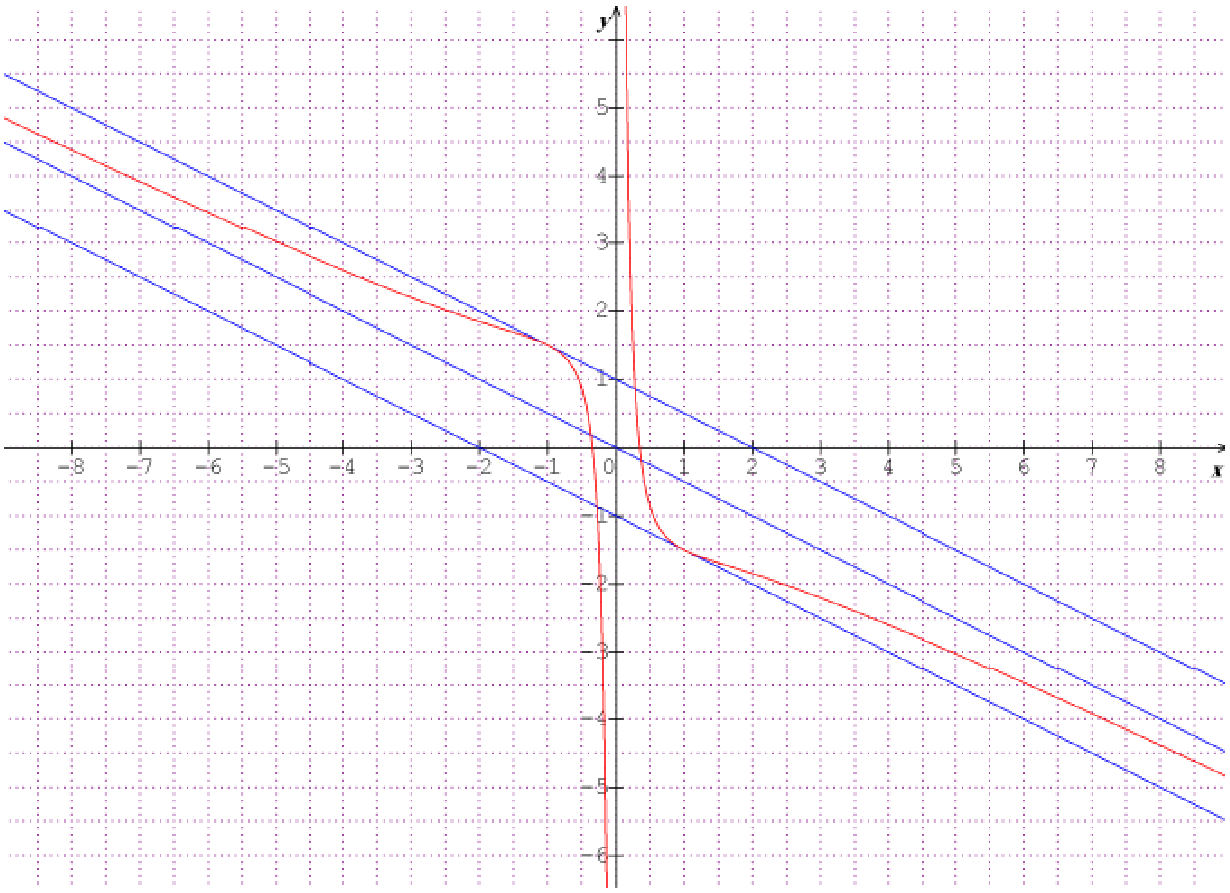
$${x_0}^2-ln{x_0}^2={x_0}^2$$
$$-ln{x_0}^2=0$$
$$ln{x_0}^2=0$$
$${x_0}^2=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ x_0=-1 \end{cases}$$

ومنه الـمنحنى (C_f) يقبل مـماسين (T_1) و (T_2) يوازيان الـمستقيم (Δ) في النقطتين $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ و $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$

$$(T_1): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$(T_1): y=\frac{-1}{2}x-1$$
$$(T_2): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$(T_2): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$
$$(T_2): y=\frac{-1}{2}x+1$$

❻ أ/ أنشئ (C_f) ، (T_1) و (T_2) ، (Δ)

ب/



ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -\frac{1}{2}x + m$

ومنه حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + m$

قيم m	المناقشة
$m \in]-\infty; -1[$	للمعادلة حلا وحيدا سالبا
$m = -1$	حلان مختلفان في الإشارة
$m \in]-1; 0[$	حلان موجبان معا وحلا وحيدا سالبا
$m = 0$	حلان مختلفان في الإشارة
$m \in]0; 1[$	حلا وحيدا موجبا وحلان سالبان معا
$m = 1$	حلان مختلفان في الإشارة
$m \in]1; +\infty[$	حلا وحيدا موجبا

❼ لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $k(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} - (x+1) - \frac{2}{x+1}\right) + 2$

(C_k) تمثيلها البياني ، بين أنه يوجد تحويل بسيط يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_k)

لدينا أن $k(x) = f(x+1) + 2$ ، ومنه (C_k) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

التمرين 11

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

❶ أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها

❷ إستنتج إشارة $f'(x)$

❸ بين أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

❹ أنشئ (C_f) ، ثم ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=e^m$

II- نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{2x}{x+2}$

❶ أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ فإن: $f(x)-h(x)=xf'(x)$

❸ إستنتج وضعية المنحنى (C_h) بالنسبة إلى (C_f) ثم أنشئ (C_h)

❹ بين أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α يقطع محور التراتيب عند النقطة التي ترتيبتها $h(\alpha)$

حل تمرين 11

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

❶ أحسب $f'(x)$ أدرس إتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها

❖ لدينا : $\left(\frac{x+2}{x}\right)'=\frac{-2}{x^2}$ ، ومنه $\left(\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right)'=\frac{-2}{x^2}\div\frac{x+2}{x}=\frac{-2}{x^2}\times\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{x(x+2)}$

$$f'(x)=1\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\left(\frac{-2}{x(x+2)}\right)\times x=\boldsymbol{\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}}$$

ملاحظة : لا يمكن دراسة إشارة $f'(x)$ ، ولهذا سنلجأ إلى دراسة تغيرات الدالة f'

❖ أدرس إتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها

$$f''(x)=\frac{-2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{-2(x+2)+2x}{x(x+2)^2}=\frac{-4}{x(x+2)^2}$$

بما أن $(x+2)^2>0$ فإن إشارة $f''(x)$ من إشارة $-4x$

x	$-\infty$ $\qquad$ -2	0 $\qquad$ $+\infty$
-4	$-$	$-$
$x(x+2)^2$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$

ومنه الدالة f' متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$ و متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}\right]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}\right]=0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	||	||	$-$
$f'(x)$	0 ↗	||	||	↘ 0

❷ إستنتج إشارة $f'(x)$

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ فإن $f'(x)>0$

❸ بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

بوضع $t=\frac{2}{x}$ ، ومنه $x=\frac{2}{t}$

لما $x\to+\infty$ ، فإن $t\to 0$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[xln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{2}{t}ln(1+t)\right] = \lim_{t\to 0}\left[2\left(\frac{ln(1+t)}{t}\right)\right] = 2$$

و . هـ . م

بنفس الكيفية نجد أيضا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

توضيح $\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(\frac{ln(1+t)}{t}\right)\right] = 1$

إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

بما أن $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]0;+\infty[$

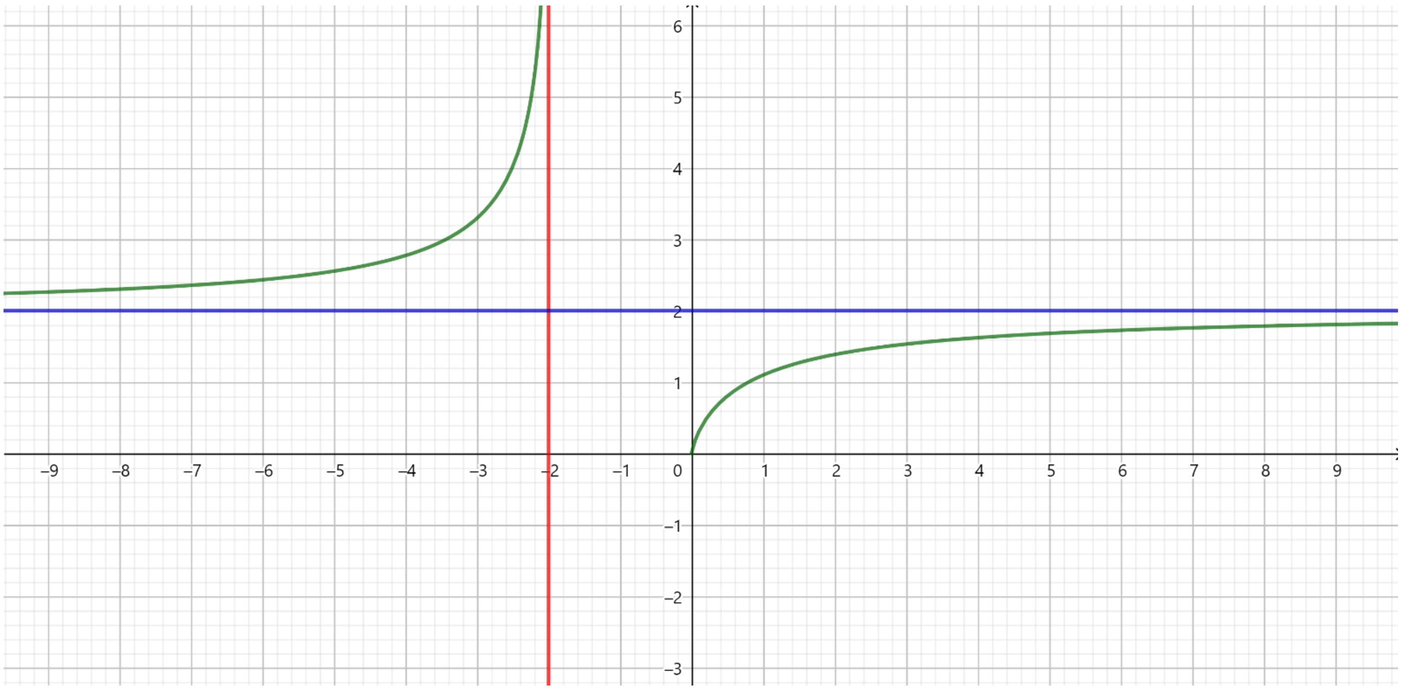
❖ حساب النهايات

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} (x) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}\left[ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right] = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}[ln(x)] = -\infty \end{cases}$ ، فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = +\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} x[\ln(x+2)-\ln x] = \lim_{\substack{x\to 0\\>}}[x\ln(x+2)-x\ln x] = 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	||	$-$
$f(x)$	2 ↗ $+\infty$	||	||	0 ↗ 2

❹ أنشئ (C_f)



ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = e^m$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = e^m$

قيم e^m	قيم m	المناقشة
$e^m \in]0;2[$	$m \in]-\infty;\ln 2[$	للمعادلة حلا وحيدا موجبا
$e^m = 2$	$m = \ln 2$	لا يوجد حلول
$e^m \in]2;+\infty[$	$m \in]\ln 2\,;+\infty[$	للمعادلة حلا وحيدا سالبا

II- نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{2x}{x+2}$

❶ أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

$$h'(x) = \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} = \frac{4x}{(x+2)^2} > 0$$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x}\right] = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x}\right] = 2$$

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ <}} (2x) = -4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ <}} [x+2] = 0^- \end{cases}$ ، فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ <}} h(x) = +\infty$

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} (2x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} [x+2] = 2 \end{cases}$ ، فإن $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} h(x) = 0$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	‖	$-$	
$h(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	‖ 0	$\nearrow$	2

❷ بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ فإن: $f(x)-h(x)=xf'(x)$

$$f(x)-h(x)=xln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2x}{x+2}=x\left[ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}\right]=xf'(x)$$

و . هـ . م

❸ إستنتج وضعية المنحنى (C_h) بالنسبة إلى (C_f) ثم أنشئ (C_h)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)=xf'(x)$

بما أن $f'(x)>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة x

(C_f) يقع تحت (C_h) على المجال $]-\infty;-2[$ ، أي أن $(C_h))$ يقع فوق (C_f))

(C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$ ، أي أن $(C_h))$ يقع تحت (C_f))

❹ بين أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α يقطع محور التراتيب عند النقطة التي ترتيبتها $h(\alpha)$

نكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α ومنه

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$
$$y=xf'(\alpha)-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$$

توضيح

نعلم أن معادلة مماس تكتب من الشكل $y=ax+b$ ، وكما نعلم أن b هي ترتيبة نقطة تقاطع مماس مع محور التراتيب ، ولهذا يجب أن نثبت أن $b=-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)=h(\alpha)$

لدينا مما سبق $f(x)-h(x)=xf'(x)$ ومنه $f(\alpha)-h(\alpha)=\alpha f'(\alpha)$

ومنه $-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)=h(\alpha)$

و . هـ . م

التمرين 12 (رياضيات)

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$

❶ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

❷ أ/ بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $10<\alpha<10{,}5$

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- h الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}$

❶ أ/ أحسب نهايتي الدالة h عند أطراف مجموعة التعريف

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ فإن : $h'(x)=\frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ج/ أدرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

III- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ ، $(\|\vec{i}\|=3cm)$

❶ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $f(x)=h(e^x)$

❷ أ/ إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$ وفسر النتيجتين هندسيا

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❸ برهن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f(x)\le\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

❹ أكتب معادلة المماس (T) عند نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

❺ أرسم (T) ، (C_f) ، نقبل $ln\sqrt{\alpha}=1.17$ و $f(ln\sqrt{\alpha})=0,7$

حل تمرين	12

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$

❶ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}}[2x]=2\\ \text{و}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}}[(x-1)\ln(x-1)]=0\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} g(x)=2$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)\left[\frac{2x}{x-1}-\ln(x-1)\right]\right]=-\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x)=2-\left[\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}(x-1)\right]=2-\ln(x-1)-1=1-\ln(x-1)$$

$g'(x)\ge 0$ يكافئ $1-\ln(x-1)\ge 0$ ، يكافئ $-\ln(x-1)\ge -1$ ، يكافئ $\ln(x-1)\le 1$

$x-1\le e$ ، يكافئ $x\le e+1$

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;e+1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[e+1;+\infty[$

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 2	$\nearrow$	$e+2$	$\searrow$	$-\infty$

❷ أ/ بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $10<\alpha<10,5$

g متناقصة تماما على المجال $[10;10.5]$ ولدينا : $\begin{cases}g(10)=0.22\\g(10.5)=-0.3\end{cases}$ ، أي $g(10)\times g(10.5)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $10<\alpha<10{,}5$

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

II- h الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}$

❶ أ/ أحسب نهايتي الدالة h عند أطراف مجموعة التعريف

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\frac{\ln(x^2-1)}{x}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x^2(1-\frac{1}{x^2})\right]}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x^2+\ln(1-\frac{1}{x^2})}{x}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln(1-\frac{1}{x^2})}{x}\right]=0$$

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ فإن : $h'(x)=\frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

$$h'(x)=\frac{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)(x)-\ln(x^2-1)}{x^2}=\frac{\frac{2x^2}{x^2-1}-\ln(x^2-1)}{x^2}=$$

$$\frac{\frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}}{x^2}=\frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}=\frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

و.هـ.م

ج/ أدرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2(x^2-1)>0$ على المجال $]1;+\infty[$ فإن إشارة $h'(x)$ من إشارة $g(x^2)$

✍ $g(x)\le 0$ إذا وفقط إذا كان $x\ge\alpha$

✍ $g(x^2)\le 0$ إذا وفقط إذا كان $x^2\ge\alpha$ ، ومنه $x\in\left]-\infty;\sqrt{\alpha}\right]\cup\left[\sqrt{\alpha};+\infty\right[$

لكن $]1;+\infty[\notin\left]-\infty;\sqrt{\alpha}\right]$ ، ومنه $g(x^2)\le 0$ إذا وفقط إذا كان $x\in\left[\sqrt{\alpha};+\infty\right[$

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left]1;\sqrt{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\sqrt{\alpha};+\infty\right[$

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$h(\sqrt{\alpha})$	$\searrow$	0

III- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ ، $(\Vert\vec{i}\Vert=3cm)$

❶ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $f(x)=h(e^x)$

$$h(e^x)=\frac{\ln((e^x)^2-1)}{e^x}=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}=f(x)$$

❷ أ/ إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وفسر النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0} h(e^x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1} h(x)=-\infty$$

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} h(e^x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

$$f'(x)=e^x\times h'(e^x)$$

بما أن $e^x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h'(e^x)$

$h'(e^x)\le 0$ إذا وفقط إذا كان $e^x\ge\sqrt{\alpha}$ ، أي $x\ge\ln\sqrt{\alpha}$

x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\ln\sqrt{\alpha}]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\ln\sqrt{\alpha};+\infty[$

x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\ln\sqrt{\alpha})$	$\searrow$	0

❸ برهن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f(x)\le\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

نلاحظ من جدول التغيرات أن $f(\ln\sqrt{\alpha})$ هي قيمة حدية محلية عظمى لـ (C_f) ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $f(x)\le f(\ln\sqrt{\alpha})$

$$f(\ln\sqrt{\alpha})=\frac{\ln\left(e^{2\ln\sqrt{\alpha}}-1\right)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}}$$

نعلم أن : $\ln\sqrt{\alpha}=\frac{1}{2}\ln\alpha$ ، ومنه

$$f(\ln\sqrt{\alpha})=\frac{\ln\left(e^{2\ln\sqrt{\alpha}}-1\right)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}}=\frac{\ln\left(e^{2\frac{1}{2}\ln\alpha}-1\right)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}}=\frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}\ \ldots\ldots..(1)$$

لدينا مما سبق $g(\alpha)=0$ ، ومنه $2\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)=0$

ومنه $\ln(\alpha-1)=\frac{2\alpha}{\alpha-1}\ \ldots\ldots(2)$

بتعويض (2) في (1) نجد

$$f(\ln\sqrt{\alpha})=\frac{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)}=\frac{2\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)}=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

بما أن $f(x) \leq f(\ln\sqrt{\alpha})$ فإن : $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

❹ أكتب معادلة المماس (T) عند نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

لإيجاد نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة $f(x_0) = 0$ ، ومنه $\frac{\ln(e^{2x_0}-1)}{e^{x_0}} = 0$

ومنه $\ln(e^{2x_0} - 1) = 0$ ، أي $e^{2x_0} - 1 = 1$ ، ومنه $e^{2x_0} = 2$ ، ومنه $2x_0 = \ln 2$ ، ومنه $x_0 = \frac{1}{2}\ln 2$

ومنه $x_0 = \ln\sqrt{2}$

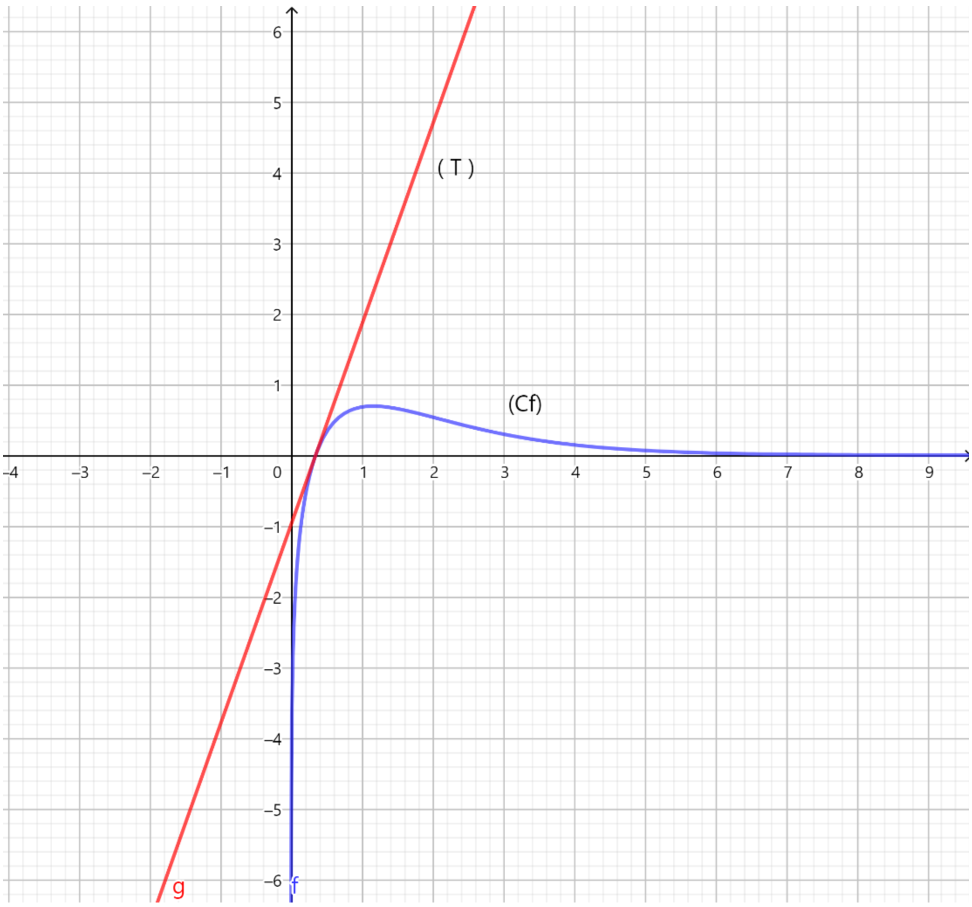
$$(T): y = f'(\ln\sqrt{2})(x - \ln\sqrt{2}) + f(\ln\sqrt{2})$$
$$(T): y = 2\sqrt{2}(x - \ln\sqrt{2}) + f(\ln\sqrt{2})$$
$$(T): y = 2\sqrt{2}(x - \ln\sqrt{2})$$

حيث $f(\ln\sqrt{2}) = 0$

لدينا $f'(x) = e^x \times h'(e^x)$ ومنه

$$f'(\ln\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times h'(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \frac{g(2)}{2(2-1)} = \sqrt{2} \times \frac{g(2)}{2} = \sqrt{2} \times \frac{4}{2} = 2\sqrt{2}$$

❺ أرسم (T) ، (C_f) ، نقبل $ln\sqrt{\alpha} = 1.17$ و $f(ln\sqrt{\alpha}) = 0,7$



التمرين 13

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = lnx + \frac{x-2}{x}$

❶ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4 < \alpha < 1.5$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-2)lnx$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أحسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا

❷ أدرس إتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها

❸ بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ، ثم أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \simeq 1.45$

❹ أكتب معادلة المماس (T) الذي يشمل النقطة $A(2;0)$

❺ أرسم (C_f)

III- نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي

❶ تحقق أن (d_m) يمر بالنقطة $A(2;0)$

❷ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - 2m$

حل تمرين 13

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = lnx + \frac{x-2}{x}$

❶ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

❖ أولا النهايات

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[lnx + \frac{x-2}{x}\right] = -\infty$$

لأن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{x-2}{x}\right] = -\infty$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [\ln x] = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[lnx + \frac{x-2}{x}\right] = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x-2}{x}\right] = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} [\ln x] = +\infty$

❖ ثانيا : الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1x - 1(x-2)}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

❷ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4<\alpha<1.5$

g متزايدة تماما على المجال $[1.4;1.5]$ ولدينا : $\begin{cases} g(1.4)=-0.09 \\ g(1.5)=0.07 \end{cases}$ ، أي $g(1.4)\times g(1.5)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث$1.4<\alpha<1.5$

إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+(x-2)lnx$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أحسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[1+(x-2)lnx]=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[1+xlnx-2\ln x]=+\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}[1+(x-2)lnx]=+\infty$$

❷ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

$$f'(x)=1\ln x+\frac{1}{x}(x-2)=\ln x+\frac{x-2}{x}=g(x)$$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

❸ بين أن : $f(\alpha)=1-\frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$

لدينا : $f(\alpha)=1+(\alpha-2)ln\alpha\ \ ....(1)$

لدينا مما سبق : $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha+\frac{\alpha-2}{\alpha}=0$ ، ومنه $\ln\alpha=-\frac{\alpha-2}{\alpha}\ .....(2)$

بتعويض (2) في (1) نجد

$$f(\alpha)=1+(\alpha-2)\left(-\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)=1-\frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$$

و . هـ . م

أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha\simeq1.45$

$$f(\alpha)\simeq1-\frac{(1.45-2)^2}{1.45}=0.8$$

❹ أكتب معادلة المماس (T) الذي يشمل النقطة $A(2;0)$

لدينا $A\in(T)$ معناه A تحقق معادلة المماس (T) ، ومنه

$$(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$(T): 0=f'(x_0)(2-x_0)+f(x_0)$$

$$\left(lnx_0 + \frac{x_0 - 2}{x_0}\right)(2 - x_0) + 1 + (x_0 - 2)lnx_0 = 0$$

$$(2 - x_0)lnx_0 + \frac{(x_0 - 2)(2 - x_0)}{x_0} + 1 + (x_0 - 2)lnx_0 = 0$$

$$-(x_0 - 2)lnx_0 + \frac{(x_0 - 2)(2 - x_0)}{x_0} + 1 + (x_0 - 2)lnx_0 = 0$$

$$\frac{(x_0 - 2)(2 - x_0)}{x_0} + 1 = 0$$

$$\frac{-x_0{}^2 + 5x_0 - 4}{x_0} = 0$$

$$-x_0{}^2 + 5x_0 - 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(-1)(-4) = 9 > 0$$

ومنه إما $x_0 = 1$ أو $x_0 = 4$

ومنه (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) عند النقطتين ذات الفاصلتين على الترتيب $x_0 = 1$ و $x_0 = 4$

❖ معادلة المماس (T_1) عند $x_0 = 1$

$$(T_1): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T_1): y = -1(x - 1) + 1$$

$$(T_1): y = -x + 2$$

❖ معادلة المماس (T_2) عند $x_0 = 4$

$$(T_2): y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)(x - 4) + 1 + 2\ln 4$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)x - 4\left(\frac{1}{2} + \ln 4\right) + 1 + 2\ln 4$$

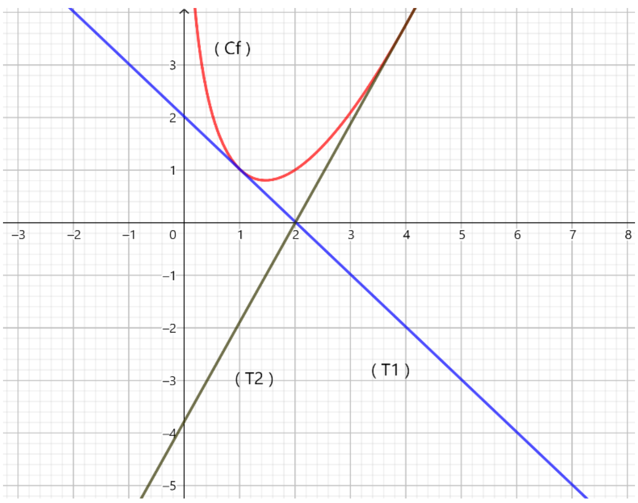
$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)x - 2 - 4\ln 4 + 1 + 2\ln 4$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)x - 1 - 2\ln 4$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)x - 2\left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)$$

$$(T_2): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)(x - 2)$$

❺ أرسم (C_f)



III- نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي

❶ تحقق أن (d_m) يمر بالنقطة $A(2;0)$

(d_m) يمر بالنقطة $A(2;0)$ معناه $A \in (d_m)$

$$0 = m(2) - 2m$$
$$0 = 0$$

ومنه (d_m) يمر بالنقطة $A(2;0)$

❷ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - 2m$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (d_m)

مناقشة دورانية

- إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإن للمعادلة حلان متمايزان
- إذا كان $m = -1$ فإن للمعادلة حلا وحيدا
- إذا كان $m \in \left]-1; \frac{1}{2} + \ln 4\right[$: لا يوجد حلول
- إذا كان $m = \frac{1}{2} + \ln 4$ فإن للمعادلة حلا وحيدا
- إذا كان $m \in \left]\frac{1}{2} + \ln 4 ; +\infty\right[$ فإن للمعادلة حلان متمايزان

التمرين 14 (بكالوريا المغرب 2019)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2$، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و ثم فسر النتيجة هندسيا

❷ أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} lnx - 1\right) lnx$

ب/ استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ج/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $\frac{(lnx)^2}{x} = 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$، ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(lnx)^2}{x}$

❸ أ/ بين من أجل كل x من $]0; 1]$: $x - 1 + lnx \leq 0$

و أنه من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $x - 1 + lnx \geq 0$

ب/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f

❹ بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

❺ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

❻ أرسم (Δ) ، (C_f)

حل تمرين 14

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2$، (C_f) منحناها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و ثم فسر النتيجة هندسيا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[1 + \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2\right] = +\infty$$

المستقيم $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

❷ أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} lnx - 1\right) lnx$

$$x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} lnx - 1\right) lnx = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(lnx)(lnx) - \ln x = 1 + \frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2 = f(x)$$

ب/ استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} lnx - 1\right) lnx\right] = +\infty$$

جـ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $\frac{(lnx)^2}{x} = 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(lnx)^2}{x}$

$$\frac{(lnx)^2}{x} = \frac{\left[ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\left[2ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \left(\frac{2ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\right] = 0$$

❸ أ/ بين من أجل كل x من $]0; 1]$: $x - 1 + lnx \le 0$، و أنه من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $x - 1 + lnx \ge 0$

لدينا من أجل كل x من $]0; 1]$ فإن $0 < x \le 1$ ، ومنه $-1 < x - 1 \le 0 \quad \ldots\ldots(1)$

ولدينا من أجل كل x من $]0; 1]$ فإن $(2) \ldots\ldots \ln x \le 0$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد $x - 1 + lnx \le 0$ وهو المطلوب

لدينا من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $x \ge 1$ ، ومنه $x - 1 \ge 0 \quad \ldots.(*)$

لدينا من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $(**) \ldots\ldots \ln x \ge 0$

بجمع (*) و (**) طرفا لطرف نجد $x - 1 + lnx \ge 0$ وهو المطلوب

ب/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{1}{x} \times \ln x\right) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

و.هـ.م

جـ/ شكل جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	↘	1.5	↗	$+\infty$

❹ بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f''(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x)-(x-1+\ln x)}{x^2}=\frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2}=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

بما أن $x^2>0$ فإن إشارة $f''(x)$ من إشارة $2-\ln x$

$f''(x)\geq 0$ ، يكافئ $2-\ln x\geq 0$ ، ومنه $-\ln x\geq -2$ ، ومنه $\ln x\leq 2$ ، ومنه $x\leq e^2$

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

بما أن $f''(x)$ إنعدم عند $x=e^2$ وغيرت من إشارتها فإن النقطة $\left(e^2;\frac{2e^2+1}{2}\right)$ هي نقطة إنعطاف

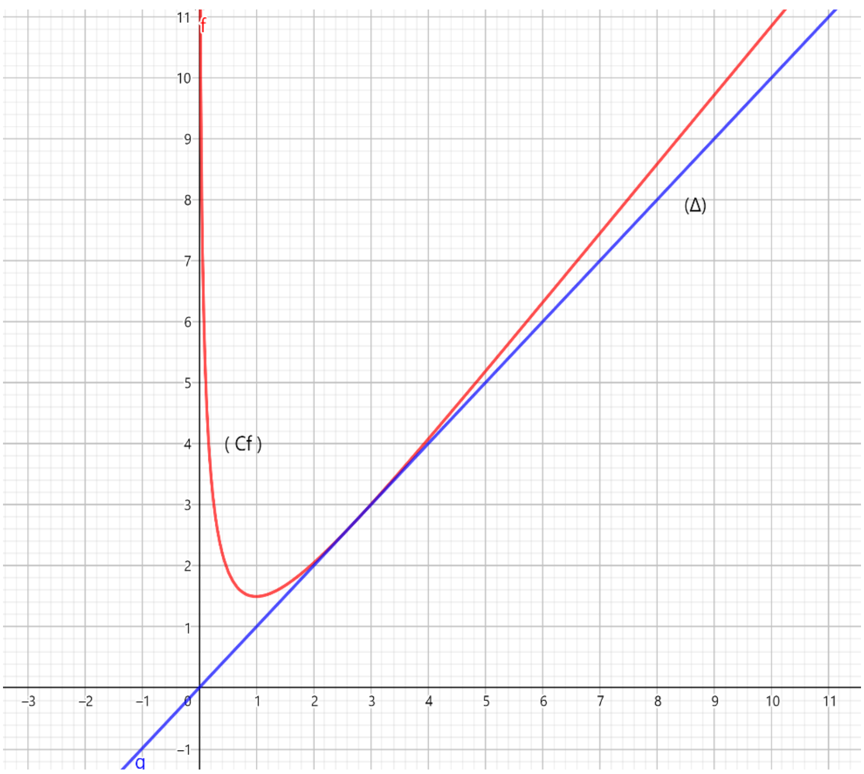
❺ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$

$$f(x)-x=x+\frac{1}{2}-lnx+\frac{1}{2}(lnx)^2-x=\frac{1}{2}-lnx+\frac{1}{2}(lnx)^2=\frac{1}{2}[(lnx)^2-2\ln x+1]$$

$$f(x)-x=\frac{1}{2}[\ln x-1]^2\geq 0$$

ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) دائما ويتقاطعان عند $x=e$

❻ أرسم (Δ) ، (C_f)



التمرين 15 (رياضيات)

α عدد حقيقي ، g_{α} هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g_{\alpha}(x)=x^2-1+\alpha\ln x$ ، وليكن (C_{α}) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ بحيث $(\|\vec{i}\|=3cm)$

❶ بين أن المنحنيات (C_{α}) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها

❷ ناقش حسب قيم α وجود وعدد النقط الحدية للمنحنى (C_{α})

❸ نفرض $\alpha=1$ ، و نضع $g_1=g$

أ/ أدرس إتجاه تغير الدالة g

ب/ أحسب $g(1)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$

II- f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+1+\frac{\ln x}{x}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

❷ أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته

ب/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

❸ أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

❹ أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

❺ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=|x|-1-\frac{\ln|x|}{|x|}$ ، وليكن (C_h) تمثيلها البياني

أ/ بين أن محور التراتيب محور تناظر للمنحنى (C_h) ، ثم أنشئ (C_h) مع توضيح كيفية الإنشاء

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $e^{h(x)}=\sqrt{|m|}$

حل تمرين 15

❶ بين أن المنحنيات (C_{α}) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها

نفرض : $\alpha_1\neq\alpha_2$ ، نحل المعادلة $g_{\alpha_1}(x)=g_{\alpha_2}(x)$ ، ومنه

$$x^2-1+\alpha_1\ln x=x^2-1+\alpha_2\ln x$$

ومنه $\alpha_1\ln x-\alpha_2\ln x=0$

ومنه $(\alpha_1-\alpha_2)\ln x=0$

ومنه $\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2=0\\ \ln x=0\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}\alpha_1=\alpha_2 & (\text{تناقض})\\ x=1\end{cases}$

بالتعويض بقيمة $x=1$ نجد $g_{\alpha}(1)=1^2-1+\alpha\ln 1$ ، ومنه $g_{\alpha}(1)=0$

ومنه نستنتج أن جميع المنحنيات (C_{α}) تمر من النقطة $A(1;0)$

❷ ناقش حسب قيم α وجود وعدد النقط الحدية للمنحنى (C_α)

الدالة g_α قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا $g'_\alpha(x) = 2x + \frac{\alpha}{x} = \frac{2x^2+\alpha}{x}$

بما أن $x \in]0;+\infty[$ فإن إشارة $g'_\alpha(x)$ من إشارة $(2x^2 + \alpha)$

✍ إذا كان $\alpha > 0$ فإن $2x^2 + \alpha > 0$ ومنه الدالة g_α متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ومنه نستنتج أنه لا توجد أي قيمة حدية

✍ إذا كان $\alpha = 0$ فإن $2x^2 + \alpha > 0$ ومنه الدالة g_α متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ومنه نستنتج أنه لا توجد أي قيمة حدية

✍ إذا كان $\alpha < 0$ ، فإن $2x^2 + \alpha = 0$ ، ومنه $2x^2 = -\alpha$ ، ومنه $x^2 = \frac{-\alpha}{2}$

ومنه إما : $x = \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$ أو $x = -\sqrt{\frac{-\alpha}{2}} \notin]0;+\infty[$

x	0		$\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$		$+\infty$
$g'_\alpha(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

ومنه توجد قيمة حدية صغرى واحدة هي $g_\alpha\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\right)$ عند $x = \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$

❸ نفرض $\alpha = 1$ ، و نضع $g_1 = g$

أ/ أدرس إتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا : $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ب/ أحسب $g(1)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$

لدينا : $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ ↗	0	↗

ومنه

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

II- f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{x}$ ، (C_f) منحناها البياني في $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أ/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و ثم فسر النتيجة هندسيا

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} [-x+1] = 1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{\ln x}{x}\right] = -\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[-x+1] = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

❷ أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$ فإن $(\Delta): y = -x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (-x+1) = \frac{\ln x}{x}$

بما أن $x \in]0;+\infty[$ فإن إشارة الفرق من إشارة $\ln x$

ومنه من أجل كل $x \in]0;1[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ)

و من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ)

(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$

❸ أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f'(x) = -1 + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - \ln x}{x^2} = -1 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{-(x^2-1+\ln x)}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

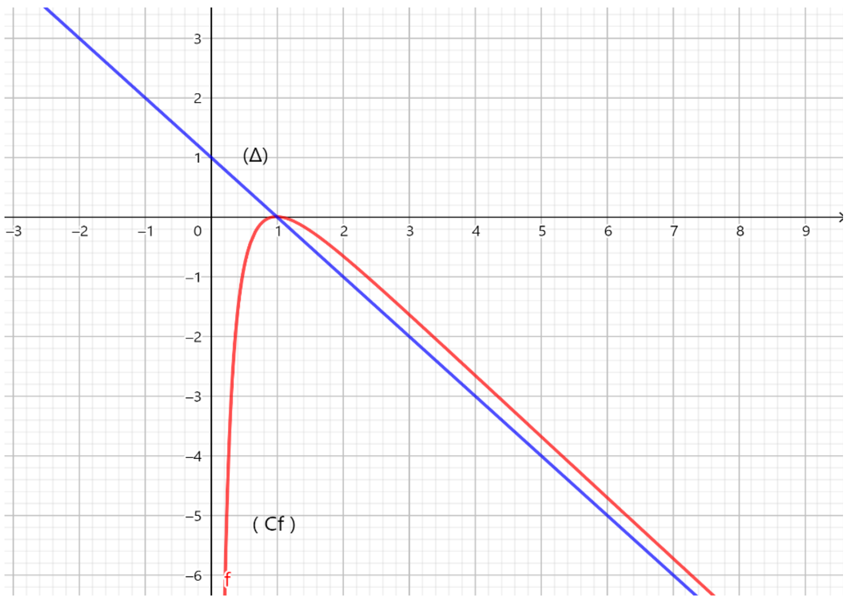
ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

❹ أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



❺ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=|x|-1-\frac{\ln|x|}{|x|}$ ، وليكن (C_h) تمثيلها البياني

أ/ بين أن محور التراتيب محور تناظر للمنحنى (C_h)

الشرط 01 : لدينا $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$

الشرط 02 : $h(-x)=|-x|-1-\frac{\ln|-x|}{|-x|}=|x|-1-\frac{\ln|x|}{|x|}=h(x)$

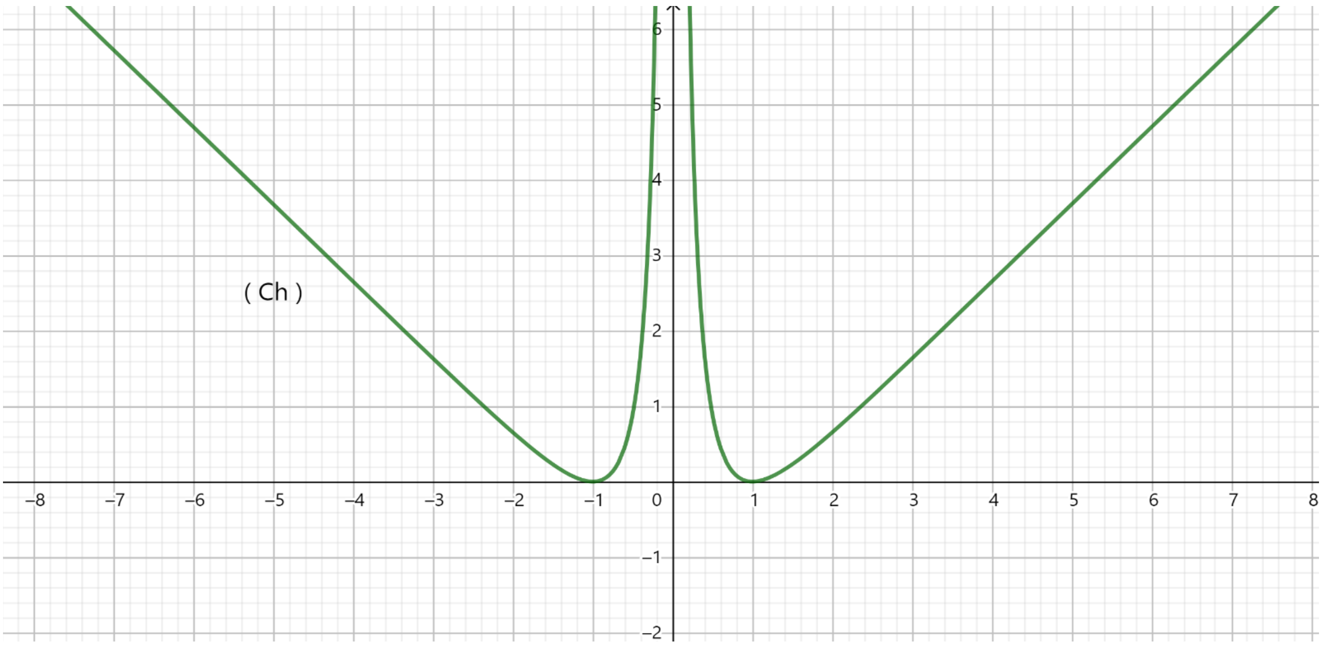
ومنه الدالة h زوجية ، إذن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C_h)

أنشئ (C_h) مع توضيح كيفية الإنشاء

$$h(x)=\begin{cases} x-1-\frac{\ln x}{x}=-f(x) & ;x>0 \\ -x-1-\frac{\ln(-x)}{-x} & ;x<0 \end{cases}$$

لما يكون $x \in]0;+\infty[$ فإن $h(x)=-f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب



ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $e^{h(x)}=\sqrt{|m|}$

لدينا : $e^{h(x)}=\sqrt{|m|}$ ، ومنه $h(x)=\ln\sqrt{|m|}$ ، ومنه حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_h) مع المستقيم $y=\ln\sqrt{|m|}$

قيم $\ln\sqrt{\vert m\vert}$	قيم $\sqrt{\vert m\vert}$	قيم $\vert m\vert$	قيم m	المناقشة
$\ln\sqrt{\vert m\vert} \in]-\infty;0[$	$\sqrt{\vert m\vert} \in]0;1[$	$\vert m\vert \in]0;1[$	$m \in]-1;0[\cup]0;1[$	لا يوجد حلول
$\ln\sqrt{\vert m\vert}=0$	$\sqrt{\vert m\vert}=1$	$\vert m\vert=1$	$m \in \{-1,1\}$	حلان
$\ln\sqrt{\vert m\vert} \in]0;+\infty[$	$\sqrt{\vert m\vert} \in]1;+\infty[$	$\vert m\vert \in]1;+\infty[$	$m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$	أربعة حلول